

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

**Всероссийская молодежная
научная конференция
«Все грани математики и
механики»**

(24–28 апреля 2018 г.)

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2018

УДК 51
ББК 22
М754

Всероссийская молодежная научная конференция «Все
М754 грани математики и механики»: сборник статей / под ред.
А.В. Старченко. – Томск : Издательский Дом Томского
государственного университета, 2018. – 171 с.

В сборнике представлены статьи, посвященные актуальным проблемам математики и механики, а также современным подходам и методам решения фундаментальных и прикладных задач.

Для студентов, аспирантов, молодых ученых.

УДК 51
ББК 22

Организационный комитет конференции:

к. ф.-м. н., доцент Касымов Д. П. (председатель оргкомитета);
к. ф.-м. н., доцент Пулятина Е. Н.;
к. ф.-м. н., доцент Гензе Л. В.;
Климентьев А. С.;
Лещинский Д. В.;
Алипова К. А. (ответственный секретарь).

©Томский государственный университет, 2018
©Авторы статей, 2018

Содержание

<i>Степанова А. Ю., Тимошенко Е. А.</i> Матричное представление эндоморфизмов p -группы ранга 2	5
<i>Фуксон С. Л., Тимошенко Е. А.</i> Отношение параллельности в элементарной p -группе ранга 2	12
<i>Рубцова Е. В.</i> Конечноэлементное моделирование псевдоминимальной поверхности. Случай положительного веса	18
<i>Борисова Я. В., Копанев С. А.</i> Выпуклость и звездность линий уровня второго типа	24
<i>Королев Д. И.</i> Компакты в пространствах $C_p(K, S)$...	30
<i>Новик А. В., Малюткина А. Н.</i> Геометрический метод изучения аналитических свойств негомеоморфных пространственных отображений	37
<i>Хабарова Е. Л., Копанева Л. С.</i> Формулы типа формул Пуассона и Шварца на классах отображений с симметрией переноса	43
<i>Бондаренко Д. С., Шеремет М. А.</i> Свободная конвекция степенной жидкости в замкнутой полости с локальным источником энергии	51
<i>Борсук А. С., Тарасов Е. А.</i> О переходе от задачи взаимодействия молекул природного газа с отдельной нанотрубкой к взаимодействию с ячейкой из четырех нанотрубок	59
<i>Стребкова Е. А., Кривошеина М. Н.</i> Выбор коротационной производной при моделировании ударного нагружения изотропного и анизотропного твёрдого тела на примере алюминиевого сплава Д16	65
<i>Шестаков А. Е., Тарасов Е. А.</i> Взаимодействие компонент природного газа с фуллереновыми частицами	72
<i>Каратаева Е. А., Зюзьков В. М.</i> Числа Мерсенна ...	78

<i>Куттубек к. Г., Старченко А. В.</i> Криптоанализ шифра Плейфера с помощью алгоритма «имитации отжига»	84
<i>Лещинский Д. В., Данилкин Е. А.</i> Математическое моделирование процесса теплообмена между двумя телами с различными теплофизическими свойствами	93
<i>Хуторная А. И., Михайлов М. Д.</i> Математическое моделирование процессов биологической очистки сточных вод на основе модели Кенейла	101
<i>Вечирко К. В., Емельянова Т. В., Пучнин Д. С.</i> Статистическое исследование влияния некоторых факторов на длительность ремиссии у наркозависимых	110
<i>Клемешова А. И., Емельянова Т. В.</i> Обнаружение "разладки" в параметрах линейной модели	117
<i>Повзун М. А., Пчелинцев Е. А.</i> Адаптивное оценивание функции регрессии по неполным данным с шумами импульсного типа	124
<i>Емельянова Т. В., Шерстобитова А. О.</i> Непараметрический метод сегментации временных рядов	131
<i>Казанцева А. И., Гриншпон Я. С.</i> Обучение решению стереометрических задач нахождение угла между двумя прямыми	137
<i>Гриншпон Я. С., Лапатин А. Л.</i> Особенности решения задач на десятичную позиционную запись натуральных чисел	146
<i>Ли О. И., Лазарева Е. Г.</i> Исследование вовлеченности школьников и студентов в учебную деятельность на занятиях по математике с применением геймификации	153
<i>Родикова Я. С., Гриншпон Я. С.</i> Алгоритмы решения опорных вычислительных задач по нахождению параметров треугольника с известными сторонами ...	160

Матричное представление эндоморфизмов p -группы ранга 2

Степанова А. Ю., Тимошенко Е. А.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: stepanova.alexa@mail.ru

Аннотация

В данной работе эндоморфизмы произвольной p -группы ранга 2 представляются обобщенными (2×2) -матрицами, элементами которых служат подходящие классы вычетов. Для таких матриц вводится понятие определителя, свойства которого схожи со свойствами определителей обычных матриц. Получен критерий обратимости обобщенной матрицы.

Ключевые слова: матрица, определитель, кольцо обобщенных матриц, p -группа, эндоморфизм.

Пусть \mathbf{Z} – кольцо целых чисел, p – простое число. При $n > 0$ кольцо вычетов по модулю p^n будем обозначать через \mathbf{Z}_{p^n} .

Пусть $m \geq n > 0$. На множестве $R = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{p^m} & \mathbf{Z}_{p^n} \\ \mathbf{Z}_{p^n} & \mathbf{Z}_{p^n} \end{pmatrix}$, т. е. множестве всех матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & d + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, введем операцию умножения

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & d + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s + p^m \mathbf{Z} & t + p^n \mathbf{Z} \\ u + p^n \mathbf{Z} & v + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} as + p^{m-n}bu + p^m \mathbf{Z} & at + bv + p^n \mathbf{Z} \\ cs + du + p^n \mathbf{Z} & p^{m-n}ct + dv + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Покажем, что операция умножения задана корректно. Пусть $A = A'$, $B = B'$ и

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & d + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} s + p^m \mathbf{Z} & t + p^n \mathbf{Z} \\ u + p^n \mathbf{Z} & v + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \\ A' &= \begin{pmatrix} a' + p^m \mathbf{Z} & b' + p^n \mathbf{Z} \\ c' + p^n \mathbf{Z} & d' + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}, & B' &= \begin{pmatrix} s' + p^m \mathbf{Z} & t' + p^n \mathbf{Z} \\ u' + p^n \mathbf{Z} & v' + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1) Так как верны сравнения $a \equiv a' \pmod{p^m}$ и $s \equiv s' \pmod{p^m}$, то $as \equiv a's' \pmod{p^m}$.

Аналогично, так как $b \equiv b' \pmod{p^n}$ и $u \equiv u' \pmod{p^n}$, имеем $bu \equiv b'u' \pmod{p^n}$. Домножая последнее сравнение на p^{m-n} , получаем $p^{m-n}bu \equiv p^{m-n}b'u' \pmod{p^m}$.

Таким образом, $as + p^{m-n}bu \equiv a's' + p^{m-n}b'u' \pmod{p^m}$.

2) Так как верны сравнения $b \equiv b' \pmod{p^n}$ и $v \equiv v' \pmod{p^n}$, то $bv \equiv b'v' \pmod{p^n}$. Из сравнения $a \equiv a' \pmod{p^m}$ следует, что $a \equiv a' \pmod{p^n}$. Поскольку $t \equiv t' \pmod{p^n}$, то $at \equiv a't' \pmod{p^n}$.

Таким образом, $at + bv \equiv a't' + b'v' \pmod{p^n}$.

3) Аналогично пункту 2) имеем $cs + du \equiv c's' + d'u' \pmod{p^n}$.

4) Так как верны сравнения $d \equiv d' \pmod{p^n}$ и $v \equiv v' \pmod{p^n}$, то $dv \equiv d'v' \pmod{p^n}$.

Далее, из сравнений $c \equiv c' \pmod{p^n}$ и $t \equiv t' \pmod{p^n}$ вытекает, что $p^{m-n}ct \equiv p^{m-n}c't' \pmod{p^n}$.

Таким образом, $p^{m-n}ct + dv \equiv p^{m-n}c't' + d'v' \pmod{p^n}$.

Из 1)–4) следует, что матрица, стоящая в правой части равенства (2), совпадает с матрицей, получающейся при перемножении A' и B' , т. е. операция умножения задана корректно.

Предложение 1. Множество R с поэлементным сложением и введенной выше операцией умножения является кольцом с единичным элементом

$$E = \begin{pmatrix} 1 + p^m \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \\ 0 + p^n \mathbf{Z} & 1 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Очевидно, что $(R, +)$ есть абелева группа. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & d + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} s + p^m \mathbf{Z} & t + p^n \mathbf{Z} \\ u + p^n \mathbf{Z} & v + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} f + p^m \mathbf{Z} & k + p^n \mathbf{Z} \\ g + p^n \mathbf{Z} & y + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

1) Сравним матрицы $(AB)C$ и $A(BC)$:

$$\begin{aligned} (AB)C &= \begin{pmatrix} as + p^{m-n}bu + p^m \mathbf{Z} & at + bv + p^n \mathbf{Z} \\ cs + du + p^n \mathbf{Z} & p^{m-n}ct + dv + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f + p^m \mathbf{Z} & k + p^n \mathbf{Z} \\ g + p^n \mathbf{Z} & y + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} asf + p^{m-n}(buf + atg + bvg) + p^m \mathbf{Z} & ask + p^{m-n}buk + aty + bvy + p^n \mathbf{Z} \\ csf + duf + p^{m-n}ctg + dvg + p^n \mathbf{Z} & p^{m-n}(csk + duk + cty) + dvy + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \\ A(BC) &= \begin{pmatrix} a + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & d + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sf + p^{m-n}tg + p^m \mathbf{Z} & sk + ty + p^n \mathbf{Z} \\ uf + vg + p^n \mathbf{Z} & p^{m-n}uk + vy + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} asf + p^{m-n}(atg + buf + bvg) + p^m \mathbf{Z} & ask + aty + p^{m-n}buk + bvy + p^n \mathbf{Z} \\ csf + p^{m-n}ctg + duf + dvg + p^n \mathbf{Z} & p^{m-n}(csk + cty + duk) + dvy + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Получаем, что $(AB)C = A(BC)$, т. е. операция умножения ассоциативна.

2) Сравним матрицы $(A + B)C$ и $AC + BC$:

$$\begin{aligned}
(A+B)C &= \begin{pmatrix} a+s+p^m\mathbf{Z} & b+t+p^n\mathbf{Z} \\ c+u+p^n\mathbf{Z} & d+v+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f+p^m\mathbf{Z} & k+p^n\mathbf{Z} \\ g+p^n\mathbf{Z} & y+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} af+sf+p^{m-n}(bg+tg)+p^m\mathbf{Z} & ak+sk+by+ty+p^n\mathbf{Z} \\ cf+uf+dg+vg+p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}(ck+uk)+dy+vy+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}, \\
AC+BC &= \begin{pmatrix} af+p^{m-n}bg+p^m\mathbf{Z} & ak+by+p^n\mathbf{Z} \\ cf+dg+p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}ck+dy+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} sf+p^{m-n}tg+p^m\mathbf{Z} & sk+ty+p^n\mathbf{Z} \\ uf+vg+p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}uk+vy+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} af+sf+p^{m-n}(bg+tg)+p^m\mathbf{Z} & ak+sk+by+ty+p^n\mathbf{Z} \\ cf+uf+dg+vg+p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}(ck+uk)+dy+vy+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Получаем, что $(A+B)C = AC+BC$. Следовательно, умножение дистрибутивно справа относительно сложения.

3) Сравним матрицы $A(B+C)$ и $AB+AC$:

$$\begin{aligned}
A(B+C) &= \begin{pmatrix} a+p^m\mathbf{Z} & b+p^n\mathbf{Z} \\ c+p^n\mathbf{Z} & d+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+f+p^m\mathbf{Z} & t+k+p^n\mathbf{Z} \\ u+g+p^n\mathbf{Z} & v+y+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} as+af+p^{m-n}(bu+bg)+p^m\mathbf{Z} & at+ak+bv+by+p^n\mathbf{Z} \\ cs+cf+du+dg+p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}(ct+ck)+dv+dy+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}, \\
AB+AC &= \begin{pmatrix} as+p^{m-n}bu+p^m\mathbf{Z} & at+bv+p^n\mathbf{Z} \\ cs+du+p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}ct+dv+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} af+p^{m-n}bg+p^m\mathbf{Z} & ak+by+p^n\mathbf{Z} \\ cf+dg+p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}ck+dy+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} as+af+p^{m-n}(bu+bg)+p^m\mathbf{Z} & at+ak+bv+by+p^n\mathbf{Z} \\ cs+cf+du+dg+p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}(ct+ck)+dv+dy+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Получаем, что $A(B+C) = AB+AC$. Следовательно, умножение дистрибутивно слева относительно сложения.

4) Очевидно, что $AE = A = EA$ для всех $A \in R$.

Таким образом, $(R, +, \cdot)$ – кольцо с единицей E .

Определение 1. *Определителем матрицы вида (1) назовем элемент $|A| = ad - p^{m-n}bc + p^n\mathbf{Z} \in \mathbf{Z}_{p^n}$.*

Проверим корректность этого определения. Пусть $A = A'$ и

$$A = \begin{pmatrix} a+p^m\mathbf{Z} & b+p^n\mathbf{Z} \\ c+p^n\mathbf{Z} & d+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a'+p^m\mathbf{Z} & b'+p^n\mathbf{Z} \\ c'+p^n\mathbf{Z} & d'+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $a + p^m\mathbf{Z} = a' + p^m\mathbf{Z}$ и $m \geq n$, то $a + p^n\mathbf{Z} = a' + p^n\mathbf{Z}$. Далее, $d + p^n\mathbf{Z} = d' + p^n\mathbf{Z}$ и, следовательно, $ad + p^n\mathbf{Z} = a'd' + p^n\mathbf{Z}$. Из равенств $b + p^n\mathbf{Z} = b' + p^n\mathbf{Z}$ и $c + p^n\mathbf{Z} = c' + p^n\mathbf{Z}$ вытекает, что $p^{m-n}bc + p^n\mathbf{Z} = p^{m-n}b'c' + p^n\mathbf{Z}$.

Следовательно, $ad - p^{m-n}bc + p^n\mathbf{Z} = a'd' - p^{m-n}b'c' + p^n\mathbf{Z}$, т. е. понятие определителя введено корректно.

Предложение 2. *Для любых $A, B \in R$ выполнено $|AB| = |A| \cdot |B|$.*

Доказательство. Действительно, пусть

$$A = \begin{pmatrix} a+p^m\mathbf{Z} & b+p^n\mathbf{Z} \\ c+p^n\mathbf{Z} & d+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} s+p^m\mathbf{Z} & t+p^n\mathbf{Z} \\ u+p^n\mathbf{Z} & v+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Имеем $|A| = ad - p^{m-n}bc + p^n\mathbf{Z}$ и $|B| = sv - p^{m-n}tu + p^n\mathbf{Z}$, отсюда получаем

$$|A| \cdot |B| = p^{2(m-n)}bctu - p^{m-n}(adtu + bcsv) + adsv + p^n\mathbf{Z}.$$

Определитель $|AB|$ матрицы

$$AB = \begin{pmatrix} as+p^{m-n}bu+p^m\mathbf{Z} & at+bv+p^n\mathbf{Z} \\ cs+du+p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}ct+dv+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$$

равен выражению

$$\begin{aligned} & (as + p^{m-n}bu)(p^{m-n}ct + dv) - p^{m-n}(at + bv)(cs + du) + p^n\mathbf{Z} = \\ & = p^{m-n}asct + asdv + p^{2(m-n)}buct + p^{m-n}budv - \\ & \quad - p^{m-n}atcs - p^{m-n}atdu - p^{m-n}bvcs - p^{m-n}bvdu + p^n\mathbf{Z} = \\ & = p^{2(m-n)}buct - p^{m-n}(atdu + bvcs) + asdv + p^n\mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Следовательно, $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Замечание 1. *Определитель единичной матрицы равен единичному элементу кольца \mathbf{Z}_{p^n} , т. е. $|E| = 1 + p^n\mathbf{Z}$.*

Хорошо известно, что справедливо

Предложение 3. *Класс $a + p^n\mathbf{Z}$ обратим в кольце \mathbf{Z}_{p^n} тогда и только тогда, когда $(a, p) = 1$, т. е. когда число a не делится на p .*

Если $m = n$, то R – это кольцо матриц, элементы которых принадлежат одному и тому же кольцу вычетов. Операция умножения и определитель в кольце R в этом случае совпадают с обычными, поэтому вопрос об обратимости матрицы решается стандартным образом: обратимы те и только те матрицы, у которых обратим определитель (в этом случае обратная матрица находится по привычным формулам, см. [1]).

В связи со сказанным далее мы рассматриваем случай $m > n$.

Теорема 1. *Пусть $m > n > 0$. Для матрицы A вида (1) следующие условия эквивалентны:*

- 1) Числа a и d не делятся на p .
- 2) $|A|$ – обратимый элемент в \mathbf{Z}_{p^n} .
- 3) A – обратимый элемент в R .

Если эти условия выполнены, то A^{-1} находится по формуле

$$\begin{pmatrix} G(1 + p^{m-n}bcF) + p^m\mathbf{Z} & -bF + p^n\mathbf{Z} \\ -cF + p^n\mathbf{Z} & aF + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $F + p^n \mathbf{Z} = |A|^{-1}$ и $G + p^m \mathbf{Z} = (a + p^m \mathbf{Z})^{-1}$.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2). Числа a и d не делятся на p , следовательно, $(ad, p) = 1$. Поскольку $m > n$, то $(ad - p^{m-n}bc, p) = 1$. Тогда по предположению 3 элемент $|A|$ обратим в \mathbf{Z}_{p^n} .

2) \Rightarrow 1). Поскольку элемент $|A|$ обратим, то верно равенство $(ad - p^{m-n}bc, p) = 1$. Так как $m > n$, то $(ad, p) = 1$. Следовательно, числа a и d не делятся на p .

3) \Rightarrow 2). Пусть матрица A обратима, тогда существует матрица A^{-1} такая, что выполнено $AA^{-1} = E$. По свойствам определителя имеем $|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1 + p^n \mathbf{Z}$. Получаем, что $|A^{-1}|$ – элемент, обратный к $|A|$.

2) \Rightarrow 3). Пусть элемент $|A| = D + p^n \mathbf{Z}$ обратим в кольце \mathbf{Z}_{p^n} и $F + p^n \mathbf{Z} = |A|^{-1}$. Так как справедлива импликация 2) \Rightarrow 1), то число a не делится на p и, следовательно, элемент $a + p^m \mathbf{Z}$ обратим в \mathbf{Z}_{p^m} , т. е. существует элемент $G + p^m \mathbf{Z} = (a + p^m \mathbf{Z})^{-1}$. Поскольку $m > n$, то можно записать $G + p^n \mathbf{Z} = (a + p^n \mathbf{Z})^{-1}$. Покажем, что матрица B , задаваемая формулой (3), обратна к матрице A .

$$\text{Имеем } AB = \begin{pmatrix} aG(1+p^{m-n}bcF) - p^{m-n}bcF + p^m \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \\ cG(1+p^{m-n}bcF) - cdF + p^n \mathbf{Z} & -p^{m-n}bcF + adF + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

1) Рассмотрим элемент, стоящий в левом верхнем углу:

$$\begin{aligned} aG(1 + p^{m-n}bcF) - p^{m-n}bcF + p^m \mathbf{Z} &= (a + p^m \mathbf{Z})(G + p^m \mathbf{Z}) + \\ &+ (a + p^m \mathbf{Z})(G + p^m \mathbf{Z})(p^{m-n}bcF + p^m \mathbf{Z}) - (p^{m-n}bcF + p^m \mathbf{Z}) = \\ &= (1 + p^m \mathbf{Z}) + (1 + p^m \mathbf{Z})(p^{m-n}bcF + p^m \mathbf{Z}) - (p^{m-n}bcF + p^m \mathbf{Z}) = \\ &= 1 + p^m \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

2) Рассмотрим элемент, стоящий в левом нижнем углу:

$$\begin{aligned} cG(1 + p^{m-n}bcF) - cdF + p^n \mathbf{Z} &= \\ &= (c + p^n \mathbf{Z})(G + p^n \mathbf{Z})(1 + p^{m-n}bcF + p^n \mathbf{Z}) - (cdF + p^n \mathbf{Z}) = \\ &= (c + p^n \mathbf{Z})(G + p^n \mathbf{Z})(1 + p^{m-n}bcF + p^n \mathbf{Z}) - \\ &\quad - (c + p^n \mathbf{Z})(G + p^n \mathbf{Z})(a + p^n \mathbf{Z})(dF + p^n \mathbf{Z}) = \\ &= (c + p^n \mathbf{Z})(G + p^n \mathbf{Z})(1 + p^{m-n}bcF - adF + p^n \mathbf{Z}) = \\ &= (c + p^n \mathbf{Z})(G + p^n \mathbf{Z})((1 + p^n \mathbf{Z}) - (D + p^n \mathbf{Z})(F + p^n \mathbf{Z})) = \\ &= (c + p^n \mathbf{Z})(G + p^n \mathbf{Z})(0 + p^n \mathbf{Z}) = 0 + p^n \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

3) Рассмотрим элемент, стоящий в правом нижнем углу:

$$\begin{aligned} -p^{m-n}bcF + adF + p^n \mathbf{Z} &= (ad - p^{m-n}bc + p^n \mathbf{Z})(F + p^n \mathbf{Z}) = \\ &= (D + p^n \mathbf{Z})(F + p^n \mathbf{Z}) = 1 + p^n \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Таким образом, $AB = E$. Элементы, стоящие на главной диагонали матрицы

$$BA = \begin{pmatrix} aG(1+p^{m-n}bcF) - p^{m-n}bcF + p^m\mathbf{Z} & bG(1+p^{m-n}bcF) - bdF + p^n\mathbf{Z} \\ 0 + p^n\mathbf{Z} & -p^{m-n}bcF + adF + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

равны $1 + p^m\mathbf{Z}$ и $1 + p^n\mathbf{Z}$, поскольку они совпадают с элементами матрицы AB , стоящими на тех же местах.

Остается рассмотреть элемент в правом верхнем углу:

$$\begin{aligned} & bG(1 + p^{m-n}bcF) - bdF + p^n\mathbf{Z} = \\ & = (b + p^n\mathbf{Z})(G + p^n\mathbf{Z})(1 + p^{m-n}bcF + p^n\mathbf{Z}) - (bdF + p^n\mathbf{Z}) = \\ & = (b + p^n\mathbf{Z})(G + p^n\mathbf{Z})(1 + p^{m-n}bcF + p^n\mathbf{Z}) - \\ & \quad - (b + p^n\mathbf{Z})(G + p^n\mathbf{Z})(a + p^n\mathbf{Z})(dF + p^n\mathbf{Z}) = \\ & = (b + p^n\mathbf{Z})(G + p^n\mathbf{Z})(1 + p^{m-n}bcF - adF + p^n\mathbf{Z}) = \\ & = (b + p^n\mathbf{Z})(G + p^n\mathbf{Z})((1 + p^n\mathbf{Z}) - (D + p^n\mathbf{Z})(F + p^n\mathbf{Z})) = \\ & = (b + p^n\mathbf{Z})(G + p^n\mathbf{Z})(0 + p^n\mathbf{Z}) = 0 + p^n\mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Таким образом, $BA = E$. Значит, B – матрица, обратная к A .

Пусть $G = G_1 \oplus G_2$ – абелева группа. Всякому эндоморфизму $\varphi \in \text{End } G$ сопоставим ту единственную матрицу

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \text{Hom}(G_1, G_1) & \text{Hom}(G_2, G_1) \\ \text{Hom}(G_1, G_2) & \text{Hom}(G_2, G_2) \end{pmatrix},$$

для которой при всех $g_1 \in G_1$ и $g_2 \in G_2$ выполнено

$$\varphi(g_1, g_2) = (\varphi_{11}(g_1) + \varphi_{12}(g_2), \varphi_{21}(g_1) + \varphi_{22}(g_2)).$$

Хорошо известно, что такое сопоставление задает изоморфизм между кольцом $\text{End } G$ и кольцом

$$\begin{pmatrix} \text{Hom}(G_1, G_1) & \text{Hom}(G_2, G_1) \\ \text{Hom}(G_1, G_2) & \text{Hom}(G_2, G_2) \end{pmatrix}.$$

Известно, что:

1) если $m \geq n$, то элементы группы $\text{Hom}(\mathbf{Z}_{p^m}, \mathbf{Z}_{p^n})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами из \mathbf{Z}_{p^n} (элемент $a + p^n\mathbf{Z}$ сопоставляется гомоморфизму $\psi \in \text{Hom}(\mathbf{Z}_{p^m}, \mathbf{Z}_{p^n})$ такому, что $\psi(z + p^m\mathbf{Z}) = az + p^n\mathbf{Z}$ при всех $z \in \mathbf{Z}$);

2) если $m \geq n$, то элементы группы $\text{Hom}(\mathbf{Z}_{p^n}, \mathbf{Z}_{p^m})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами из \mathbf{Z}_{p^n} (элемент $b + p^n\mathbf{Z}$ сопоставляется гомоморфизму $\psi \in \text{Hom}(\mathbf{Z}_{p^n}, \mathbf{Z}_{p^m})$ такому, что $\psi(z + p^n\mathbf{Z}) = p^{m-n}bz + p^m\mathbf{Z}$ при всех $z \in \mathbf{Z}$).

Пусть теперь $G_1 = \mathbf{Z}_{p^m}$, $G_2 = \mathbf{Z}_{p^n}$ и $G = G_1 \oplus G_2$. Из сказанного следует, что эндоморфизмы из $\text{End } G$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами кольца R , причем каждому эн-

доморфизму φ группы G ставится в соответствие та единственная матрица вида (1), для которой

$$\varphi(z_1 + p^m \mathbf{Z}, z_2 + p^n \mathbf{Z}) = (az_1 + p^{m-n}bz_2 + p^m \mathbf{Z}, cz_1 + dz_2 + p^n \mathbf{Z})$$

при любых $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$. Непосредственно проверяется, что при таком сопоставлении операции сложения и композиции кольца $\text{End } G$ перейдут в операции, введенные ранее на R .

Литература

1. Глухов М. М., Елизаров В. П., Нечаев А. А. Алгебра. СПб.: Лань, 2015.
2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974.

Отношение параллельности в элементарной p -группе ранга 2

Фуксон С. Л., Тимошенко Е. А.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: fouk.son.ya@gmail.com

Аннотация

Статья посвящена исследованию понятия параллельности в абелевой группе. Определение отношения параллельности в произвольной абелевой группе было дано финскими математиками в статье «Perpendicularity in an Abelian group» (2013). Нами приведены некоторые свойства параллельности. Полностью описаны параллельности в прямой сумме циклических групп $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$. Также найдено количество различных параллельностей в данной группе. Отдельно выделен и рассмотрен частный случай – группа $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Ключевые слова: абелева группа, прямая сумма, циклическая группа, параллельность, ортогональность.

Понятия параллельности и ортогональности неразрывно связаны друг с другом. В [1] параллельность определяется через ортогональность. Напомним определение ортогональности.

Определение 1. Пусть $(G, +)$ – аддитивная абелева группа, и пусть \perp – бинарное отношение в G , удовлетворяющее следующим аксиомам:

(A1) для каждого элемента $a \in G$ существует элемент $b \in G$ такой, что $a \perp b$;

(A2) для каждого элемента $a \in G \setminus \{0\}$ выполнено $a \not\perp a$;

(A3) для любых элементов $a, b \in G$ из $a \perp b$ следует $b \perp a$;

(A4) для любых элементов $a, b, c \in G$ из $a \perp b$ и $a \perp c$ следует $a \perp (b + c)$;

(A5) для любых элементов $a, b \in G$ из $a \perp b$ следует $a \perp -b$.

Тогда бинарное отношение \perp называется ортогональностью в G .

Для подмножеств A и B множества G мы обозначим через $A * B$ бинарное отношение такое, что

$$(x, y) \in A * B \iff (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in B \wedge y \in A);$$

иначе говоря, положим $A * B = (A \times B) \cup (B \times A)$. Заметим, что в общем случае $A * B$ не является отношением ортогональности, так

как $A * B$ содержит не все пары вида $(g, 0)$. Исправим это, введя обозначение $\overline{A * B}$ и полагая

$$\overline{A * B} = (A * B) \cup (G * 0).$$

Если A и B – пересекающиеся по 0 подгруппы группы G , то легко видеть, что $\overline{A * B}$ – отношение ортогональности.

Определение 2. *Тривиальной ортогональностью называется ортогональность $\perp_0 = G * 0$.*

В [2] были полностью описаны ортогональности группы $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, где p – простое число. Из результатов [2] видно, что число s_{ort} всевозможных ортогональностей в прямой сумме циклических групп $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ вычисляется по формуле

$$s_{ort} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \frac{(p+1)!}{2^i (p-2i+1)! i!}.$$

Определение 3. *Пусть A – некоторое непустое подмножество в G . Назовём ортогональным дополнением (или \perp -дополнением) подмножества A множество*

$$A^\perp = \{y \in G \mid y \perp a \text{ для всех } a \in A\}.$$

Заметим, что для любого подмножества A множество A^\perp будет подгруппой в G .

Определение 4. *Пусть в группе G задана ортогональность \perp , и пусть $a, b \in G$. Будем говорить, что элементы a и b параллельны, и писать $a \parallel b$, если $\{a\}^\perp = \{b\}^\perp$.*

Лемма 1. *Всякое отношение параллельности \parallel обладает следующими свойствами:*

- (1) для любого элемента $a \in G$ справедливо $a \parallel a$;
- (2) для любых $a, b \in G$ из $a \parallel b$ следует $b \parallel a$;
- (3) для любых $a, b, c \in G$ из $a \parallel b$ и $b \parallel c$ следует $a \parallel c$;
- (4) для любого элемента $a \in G \setminus \{0\}$ справедливо $0 \not\parallel a$.

Доказательство. Свойства (1), (2), (3) следуют из рефлексивности, симметричности и транзитивности отношения равенства.

Для доказательства свойства (4) предположим противное: пусть $0 \parallel a$, тогда $\{0\}^\perp = \{a\}^\perp$. Так как $\{0\}^\perp = G$, то имеем $\{a\}^\perp = G$, что противоречит аксиоме (A2).

Ввиду леммы 1 всякая параллельность является отношением эквивалентности, т. е. для описания какой-либо параллельности достаточно описать все классы эквивалентных (параллельных) друг другу элементов группы G .

Обозначим через \parallel_0 отношение параллельности, соответствующее тривиальной ортогональности \perp_0 .

Лемма 2. *Разбиение всякой ненулевой абелевой группы G на классы параллельности относительно \parallel_0 имеет вид $G = \{0\} \cup G \setminus \{0\}$.*

Доказательство. Пусть $a \in G$. Если $a = 0$, то $\{a\}^{\perp_0} = G$. Если же $a \in G \setminus \{0\}$, то $\{a\}^{\perp_0} = 0$. Таким образом, все ненулевые элементы из G параллельны друг другу, но не параллельны элементу 0 .

Выясним, сколькими параллельностями обладает прямая сумма циклических групп $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.

Теорема 1. *Число s_{par} всевозможных параллельностей прямой суммы циклических групп $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, где $p \geq 3$, вычисляется по формуле $s_{par} = 2^p$.*

Доказательство. Группа $G = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ представима в виде

$$G = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{p+1},$$

где $\{A_j\}_{j=1}^{p+1}$ – пересекающиеся друг с другом по 0 циклические группы порядка p (например, если подгруппы A_p и A_{p+1} порождены элементами g и h соответственно, то можно считать, что при $1 \leq j \leq p-1$ группа A_j порождена элементом $g + jh$). Из полученного в [2] описания ортогональностей в группе $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ следует, что всякая такая ортогональность является объединением i элементарных ортогональностей, где $0 \leq i \leq \frac{p+1}{2}$ (элементарными мы называем ортогональности вида $\overline{A_j * A_k}$, где $j \neq k$).

Пусть \perp – произвольная ортогональность в группе G . После подходящей перенумерации имеем

$$\perp = \overline{A_1 * A_2} \cup \overline{A_3 * A_4} \cup \dots \cup \overline{A_{2i-1} * A_{2i}},$$

где $0 \leq i \leq \frac{p+1}{2}$ (при $i = 0$ считаем, что объединение равно $G * 0$).

Найдём \perp -дополнения элементов группы G :

- $\{0\}^{\perp} = G$;
- для всех $j \in \{1, 3, \dots, 2i-1\}$ и $a \in A_j \setminus \{0\}$ имеем $\{a\}^{\perp} = A_{j+1}$;
- для всех $j \in \{2, 4, \dots, 2i\}$ и $a \in A_j \setminus \{0\}$ имеем $\{a\}^{\perp} = A_{j-1}$;
- для всех $j \in \{2i+1, \dots, p+1\}$ и $a \in A_j \setminus \{0\}$ имеем $\{a\}^{\perp} = 0$.

Итак, классы эквивалентности относительно параллельности, соответствующей выбранной ортогональности \perp , имеют вид

$$\{0\}, A_1 \setminus \{0\}, A_2 \setminus \{0\}, \dots, A_{2i} \setminus \{0\}, (A_{2i+1} \cup \dots \cup A_{p+1}) \setminus \{0\}$$

(последний класс может оказаться пустым).

Заметим, что все классы, кроме первого и последнего, содержат $p - 1$ элементов. Последний класс содержит $(p + 1 - 2i)(p - 1)$ элементов; при нечётном p это число не равно $p - 1$, так как $p \neq 2i$.

Таким образом, классы параллельности однозначно определяются выбором групп A_1, \dots, A_{2i} из имеющихся $p + 1$ групп, т.е. при фиксированном i количество различных параллельностей равно числу сочетаний C_{p+1}^{2i} . Значит, при $p \geq 3$ формула для числа различных параллельностей s_{par} в группе $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ имеет вид

$$s_{par} = \sum_{i=0}^{\frac{p+1}{2}} C_{p+1}^{2i}.$$

Так как справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\frac{p+1}{2}} C_{p+1}^{2i} &= C_{p+1}^0 + C_{p+1}^2 + C_{p+1}^4 + \dots + C_{p+1}^{p+1} = \\ &= C_p^0 + (C_p^1 + C_p^2) + (C_p^3 + C_p^4) + \dots + C_p^p = 2^p, \end{aligned}$$

мы получаем утверждение теоремы.

Заметим, что в теореме 1 мы, помимо нахождения количества различных параллельностей в $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, получили полное описание таких параллельностей.

Пример 1. Рассмотрим группу $G = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$. Мы можем записать $G = \{0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$, где

$$\begin{aligned} 0 &= (0, 0), & a_1 &= (0, 1), & a_2 &= (0, 2), \\ a_3 &= (1, 0), & a_4 &= (1, 1), & a_5 &= (1, 2), \\ a_6 &= (2, 0), & a_7 &= (2, 1), & a_8 &= (2, 2) \end{aligned}$$

(сложение производится по модулю 3).

Нетривиальными подгруппами группы G являются подгруппы $A = \{0, a_1, a_2\}$, $B = \{0, a_3, a_6\}$, $C = \{0, a_4, a_8\}$ и $D = \{0, a_5, a_7\}$.

В силу леммы 2 разбиение группы G на классы параллельности относительно $\|_0$ имеет вид $G = \{0\} \cup \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$.

Согласно [2] в группе G существует шесть различных элементарных ортогональностей:

$$\begin{aligned} \perp_1 &= \overline{A * B}, & \perp_2 &= \overline{A * C}, & \perp_3 &= \overline{A * D}, \\ \perp_4 &= \overline{B * C}, & \perp_5 &= \overline{B * D}, & \perp_6 &= \overline{C * D}. \end{aligned}$$

Рассмотрим элементарную ортогональность \perp_1 . Для неё ортогональные дополнения элементов группы G имеют вид

$$\begin{aligned}
\{0\}^{\perp_1} &= G; \\
\{a_1\}^{\perp_1} &= \{a_2\}^{\perp_1} = \{0, a_3, a_6\}; \\
\{a_3\}^{\perp_1} &= \{a_6\}^{\perp_1} = \{0, a_1, a_2\}; \\
\{a_4\}^{\perp_1} &= \{a_5\}^{\perp_1} = \{a_7\}^{\perp_1} = \{a_8\}^{\perp_1} = \{0\}.
\end{aligned}$$

Таким образом, разбиение группы G на классы эквивалентности относительно той параллельности, которая соответствует ортогональности \perp_1 , имеет вид

$$G = \{0\} \cup \{a_1, a_2\} \cup \{a_3, a_6\} \cup \{a_4, a_5, a_7, a_8\}.$$

Аналогичный вид имеют классы эквивалентности для параллельностей, соответствующих ортогональностям $\perp_2, \perp_3, \perp_4, \perp_5, \perp_6$.

Помимо элементарных ортогональностей, в группе G есть три максимальные ортогональности, полученные с помощью объединения элементарных:

$$\begin{aligned}
\perp_{16} &= \overline{A * B} \cup \overline{C * D}, \\
\perp_{25} &= \overline{A * C} \cup \overline{B * D}, \\
\perp_{34} &= \overline{A * D} \cup \overline{B * C}.
\end{aligned}$$

Найдём классы параллельных элементов для ортогональности \perp_{16} . Выпишем ортогональные дополнения элементов:

$$\begin{aligned}
\{0\}^{\perp_{16}} &= G; \\
\{a_1\}^{\perp_{16}} &= \{a_2\}^{\perp_{16}} = \{0, a_3, a_6\}; \\
\{a_3\}^{\perp_{16}} &= \{a_6\}^{\perp_{16}} = \{0, a_1, a_2\}; \\
\{a_4\}^{\perp_{16}} &= \{a_8\}^{\perp_{16}} = \{0, a_5, a_7\}; \\
\{a_5\}^{\perp_{16}} &= \{a_7\}^{\perp_{16}} = \{0, a_4, a_8\}.
\end{aligned}$$

Разбиение группы G на классы эквивалентности относительно параллельности \parallel_{16} , которая соответствует ортогональности \perp_{16} , имеет, таким образом, следующий вид:

$$G = \{0\} \cup \{a_1, a_2\} \cup \{a_3, a_6\} \cup \{a_4, a_8\} \cup \{a_5, a_7\}.$$

С помощью аналогичных рассуждений можно показать, что разбиение группы G на классы параллельности относительно \parallel_{25} и \parallel_{34} будет иметь тот же вид, что и разбиение относительно \parallel_{16} .

Таким образом, построены все восемь параллельностей, которыми обладает группа $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.

Пример 2. Случай $p = 2$ отличается от рассмотренной ситуации $p > 2$, так как при $p = 2$ может оказаться, что выполнено

$$(p + 1 - 2i)(p - 1) = p - 1.$$

Покажем, что если $p = 2$, то $s_{par} = 2$ и, следовательно, полученная в теореме 1 формула уже не будет справедлива.

Пусть $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Обозначим элементы группы G через $0, a, b, c$. Нетривиальными подгруппами группы G служат $A = \{0, a\}$, $B = \{0, b\}$ и $C = \{0, c\}$. В группе G есть четыре ортогональности: $\perp_0, \perp_{AB}, \perp_{AC}, \perp_{BC}$, где $\perp_{AB} = A * B$.

Рассмотрим тривиальную ортогональность \perp_0 . В силу леммы 2 соответствующее отношению \parallel_0 разбиение на классы параллельности имеет вид $G = \{0\} \cup \{a, b, c\}$.

Рассмотрим ортогональность \perp_{AB} . Ортогональными дополнениями элементов группы G являются множества $\{a\}^{\perp_{AB}} = \{b, 0\}$, $\{b\}^{\perp_{AB}} = \{a, 0\}$, $\{c\}^{\perp_{AB}} = \{0\}$ и $\{0\}^{\perp_{AB}} = \{a, b, c, 0\}$.

Среди перечисленных множеств нет равных, а значит, разбиение группы G на классы параллельности относительно \parallel_{AB} имеет вид $G = \{0\} \cup \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$.

Очевидно, с помощью аналогичных рассуждений обнаруживается, что для \perp_{AC} и \perp_{BC} разбиение на классы параллельных элементов также будет иметь вид $G = \{0\} \cup \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$.

Итак, в группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ есть всего две параллельности.

Литература

1. Naukkanen P., Mattila M., Merikoski J.K., Tossavainen T. Perpendicularity in an Abelian group // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2013. V. 2013. Article ID 983607.
2. Фуксон С.Л. Ортогональности группы $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4(36). С. 46–54.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974.

Конечноэлементное моделирование псевдоминимальной поверхности. Случай положительного веса

Рубцова Е. В

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: rubc-ekaterina@mail.ru

Аннотация

Рассмотрен способ конечно-элементного моделирования поверхности отрицательной гауссовой кривизны. Такие поверхности применяются в практике архитектуры и строительства. В основе модели – алгоритм, допускающий эффективное программирование в Maple и настройку по параметрам.

Ключевые слова: поверхность, кривизна, алгоритм, Maple.

The method of finite element modeling of the surface of negative Gaussian curvature is considered. Such surfaces are used in the practice of architecture and construction. At the core of the model is an algorithm that allows efficient programming in Maple and configuration by parameters.

Keywords: surface, curvature, algorithm, Maple.

В практике конструирования и возведения различных сооружений встречаются поверхности, у которых главные кривизны имеют разные знаки. Например:

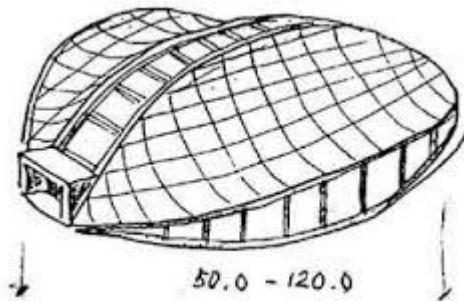


Рис. 1. Пример строительной конструкции отрицательной кривизны

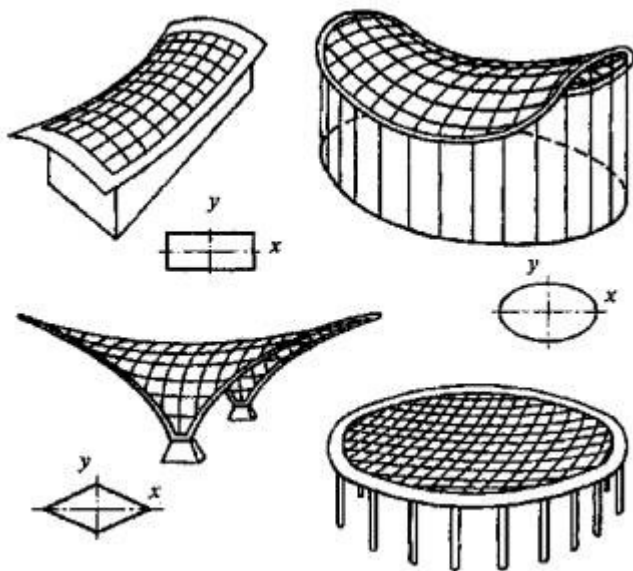


Рис. 2. Схематические изображения различных перекрытий

Дополнительные примеры перекрытия, имеющих форму поверхности с отрицательной гауссовой кривизной (рис. 2).

Поверхности такого рода задаются достаточно сложными дифференциальными уравнениями второго порядка, которые не удастся решить аналитически. Поэтому в инженерной практике предпочтение отдается так называемому конечно-элементному моделированию, позволяющему создавать конечные массивы точек, приближающих форму моделируемой поверхности. Среди алгоритмов, хорошо себя зарекомендовавших в задачах моделирования поверхностей отрицательной гауссовой кривизны частного вида (минимальных поверхностей), следует отметить алгоритм, предложенный Е.В. Поповым [1]. Следует отметить, что форма вантового перекрытия как правило есть минимальная поверхность. Хорошо известно, что минимальная поверхность определена принадлежащей ей замкнутой кривой. Массив точек на входе алгоритма Е.В. Попова – это конечный массив точек на некоторой замкнутой линии, ограничивающей поверхность. Область, полученная проецированием искомой поверхности на координатную плоскость XOY покры-

вается равномерной прямоугольной сеткой. Данная сетка разбивает указанную область на элементарные четырехугольники – ячейки.

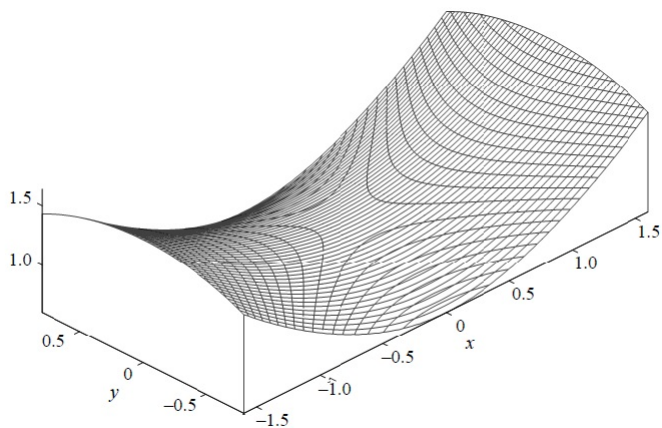


Рис. 3. Область, покрытая равномерной прямоугольной сеткой

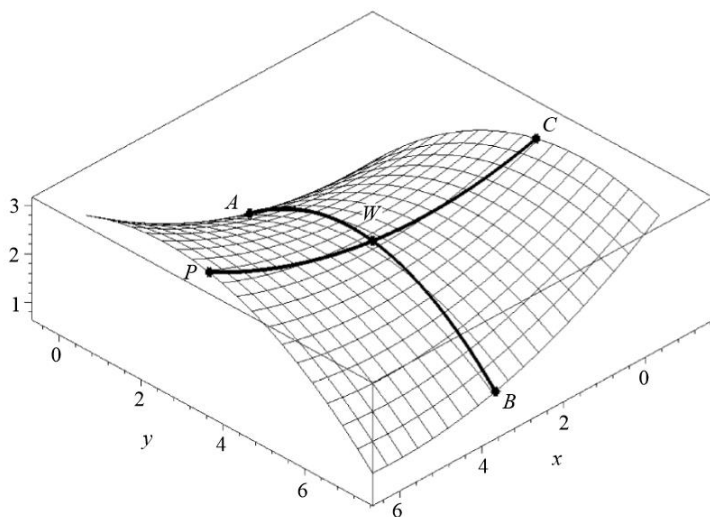


Рис. 4. Поверхность при $a = 2$

Здесь W – аффинный центр четырехугольника.

Отметим, что система координат, в которой совершались по-

строения и вычисления, внутренним образом присоединена к четырехугольнику $ACBP$, и потому результат носит инвариантный характер.

Значение аппликаты в центральной точке ячейки вычисляется по формуле

$$F(z) = |AW|^2 + |BW|^2 + |CW|^2 + |PW|^2. \quad (1)$$

В [2, 3] введен в рассмотрение и частично исследован класс поверхностей отрицательной гауссовой кривизны, включающий в себя класс минимальных поверхностей. Это класс псевдоминимальных поверхностей, характеризующийся натуральным уравнением

$$k_1 + ak_2 = 0, a = \text{const}, a \neq 0. \quad (2)$$

При $a = 1$ получаем минимальные поверхности. Как отмечено в [2, 3], псевдоминимальные поверхности применяются для моделирования формы сетеполотна параболоидных рефлекторов. Это обусловлено тем обстоятельством, что сетеполотно (как правило) наделено ортотропным свойством материала. Именно, коэффициенты в разных направлениях неодинаковы, что допускает выражение посредством коэффициента ортотропности a :

$$a = \left(\frac{\text{коэфф}_{\text{рад}}}{\text{коэфф}_{\text{окр}}} \right)^2. \quad (3)$$

Это тот самый коэффициент, который входит в уравнение (2), $\text{коэфф}_{\text{рад}}$ – это коэффициент растяжения сетеполотна в радиальном направлении, а $\text{коэфф}_{\text{окр}}$ – коэффициент растяжения сетеполотна вдоль окружности.

Класс псевдоминимальных поверхностей (локально) можно задать дифференциальным уравнением в частных производных, весьма сложном для аналитического решения. По этой причине в [2, 3] предложена схема конечноэлементного моделирования таких поверхностей. Именно, применена модификация алгоритма Попова (1), в которой добавлен весовой коэффициент :

$$F(z) = (|AW|^2 + |BW|^2) + |CW|^2 + |PW|^2 \quad (4)$$

Задача сводится к минимизации функции $f(z)$.

Также при работе с псевдоминимальными поверхностями стоит помнить, что данные поверхности характеризуются постоянством отношения главных кривизн, которое показано в формуле (2).

В определении псевдоминимальной поверхности коэффициент a веса положительный. Отметим, что уравнение (2) имеет смысл независимо от знака числа a . Возникает вопрос о том, к какому результату приведет применение конечноэлементного моделирования по схеме (4) при $a < 0$.

Проведен эксперимент: построена поверхность с весовым коэффициентом меньше нуля. Формула (4) тем точнее, чем ближе направление оси абсцисс к первому главному направлению моделируемой поверхности. Пусть t — угол между указанными направлениями. Для оценки погрешности, приносимой этим углом, в [2] приведена формула

$$\frac{\Delta Z}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = \frac{(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} h_x^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} h_y^2)(a - 1)t^2}{2(a + 1)}$$

(отброшены слагаемые более высокого порядка малости, нежели t^2).

Данная формула применялась для оценки погрешности с положительным весовым коэффициентом в (2). Для вышеупомянутого случая с отрицательным весовым коэффициентом a данная оценка также применима, но с некоторой осторожностью. Весовой коэффициент a не должен быть близок к «-1», т.к. в противном случае погрешность может непредсказуемо возрасти. В остальных случаях данная оценка вполне применима.

Представление о полученной конечно-элементной модели дает следующий рисунок.

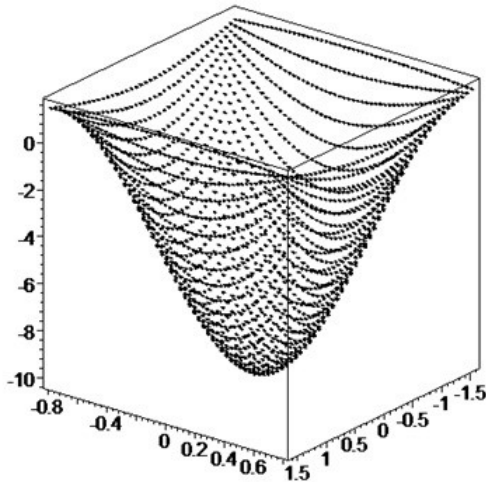


Рис. 5. Пример поверхности класса (2) при $a = -\frac{1}{2}$

Литература

1. Бухтяк М.С. Геометрическое моделирование деформации сетеполотна параболического рефлектора // Математическое моделирование. 2016. Т. 39. № 1. С. 97–106.
2. Попов Е.В. Метод натянутых сеток в задачах геометрического моделирования: дис. . . . д-р техн. наук. – Нижний Новгород, 2001. – 248 с.
3. Бухтяк М.С. Составная поверхность, близкая к псевдоминимальной. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 2(46). С. 5–24.

Выпуклость и звездность линий уровня второго типа

Борисова Я. В., Копанев С. А.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: yana_borisova_95@bk.ru

Аннотация

В работе рассмотрены линии уровня первого и второго типа для голоморфных однолистных отображений. Из существующих геометрических характеристик кривых, нами рассматриваются выпуклость и звездность. Выпуклость и звездность для линий уровня первого типа хорошо изучены. В работе сформулированы аналитические критерии выпуклости и звездности линий уровня второго типа.

Ключевые слова: кривая, выпуклость, звездность, линия уровня.

Пусть S – множество всех голоморфных однолистных в единичном круге E отображений $f : E \rightarrow \mathbb{C}$, $w = f(z)$, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

Есть два подхода к понятию линия уровня [4].

Определение 1. *Линией уровня первого типа отображения $f \in S$ назовем образ окружности $z : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $z(t) = re^{it}$, r – фиксировано, $0 < r < 1$, относительно отображения $f \in S$.*

Определение 2. *Линией уровня второго типа отображения $f \in S$ назовем прообраз границы пересечения замкнутого круга $E_w = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq \rho\}$, ρ – фиксировано, $0 < \rho < \infty$, с множеством $f(E)$ относительно отображения $f \in S$.*

Заметим, что линия уровня второго типа в зависимости от ρ может быть замкнутой простой аналитической кривой, состоять не более чем из счетного множества аналитических дуг или быть пустым множеством. Существуют геометрические характеристики кривой на плоскости, такие как кривизна, уклонение, выпуклость, звездность [2]. Для линии уровня первого типа поведение этих характеристик изучалось во многих работах [1], [3]. Рассмотрим поведение выпуклости и звездности для линии уровня второго типа. Кривизна и уклонение линий уровня второго типа рассмотрены в [4]. Сначала напомним известные понятия – звездность и выпуклость кривой.

Определение 3. Кривая Γ называется звездной относительно точки z_0 , если любой прямолинейный отрезок, соединяющий z_0 с каждой точкой этой кривой, целиком лежит по одну сторону от кривой Γ .

Определение 4. Кривая Γ называется выпуклой, если любой прямолинейный отрезок, соединяющий две точки кривой Γ , целиком лежит по одну сторону от нее.

Сформулируем аналитические критерии выпуклости и звездности для линий уровня второго типа.

Критерий выпуклости. Пусть $f \in S$. Пусть $w_0 = \rho e^{it}$, Γ_ρ – линия уровня второго типа. Тогда кривая Γ_ρ выпукла относительно $z = 0$, если для $\forall t \in \bigcup \Omega_l$, $\Omega_l \subset [0; 2\pi]$, Ω_l – попарно непересекающиеся интервалы, выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} \left(1 - \frac{\rho e^{it} f''(f^{-1}(\rho e^{it}))}{f'^2(f^{-1}(\rho e^{it}))} \right) > 0 \quad (1)$$

Критерий звездности. Пусть $f \in S$. Пусть $w_0 = \rho e^{it}$, Γ_ρ – линия уровня второго типа. Тогда кривая Γ_ρ звездна относительно $z = 0$, если для $\forall t \in \bigcup \Omega_l$, $\Omega_l \subset [0; 2\pi]$, Ω_l – попарно непересекающиеся интервалы, выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} \left(\frac{f(f^{-1}(\rho e^{it}))}{f^{-1}(\rho e^{it}) f'(f^{-1}(\rho e^{it}))} \right) > 0 \quad (2)$$

Заметим, что если ввести следующее обозначение: $z_t = f^{-1}(\rho e^{it})$, то формулы (1) и (2) примут более компактный вид:

$$\operatorname{Re} \left(1 - \frac{f(z_t) f''(z_t)}{f'^2(z_t)} \right) > 0 \text{ и } \operatorname{Re} \left(\frac{f(z_t)}{z_t f'(z_t)} \right) > 0.$$

В связи с введенными понятиями сформулируем следующие экстремальные задачи.

Задача 1. Фиксируем точку $z_0 \in E$, $w_0 = f(z_0)$, $w_0 = \rho e^{it}$. Строим линию уровня второго типа Γ . Задача состоит в нахождении наиболее близкой к нулю точки линии уровня второго типа. Перебирая все отображения из класса S выбрать наименьшее из таких значений. А также найти наиболее удаленную от нуля точку линии уровня второго типа. Перебирая все отображения из класса S выбрать наибольшее из таких значений. Другими словами, найти:

$$\inf_{f \in S} \left\{ \inf_{t \in \bigcup \Omega_l} \{|f^{-1}(\rho e^{it})|\} \right\} \text{ и } \sup_{f \in S} \left\{ \sup_{t \in \bigcup \Omega_l} \{|f^{-1}(\rho e^{it})|\} \right\}.$$

Задача 2. Фиксируем точку $z_0 \in E$, $w_0 = f(z_0)$, $w_0 = \rho e^{it}$. Строим линию уровня второго типа Γ . Задача состоит в нахождении ρ_0 такого, что для $\forall \rho < \rho_0$ Γ – выпуклая кривая. То есть надо найти ρ_0 такое, чтобы

$$\operatorname{Re} \left(1 - \frac{\rho e^{it} f''(f^{-1}(\rho e^{it}))}{f'^2(f^{-1}(\rho e^{it}))} \right) > 0, \forall \rho < \rho_0, \forall t \in \bigcup_l \Omega_l, \forall f \in S.$$

Задача 3. Фиксируем точку $z_0 \in E$, $w_0 = f(z_0)$, $w_0 = \rho e^{it}$. Строим линию уровня второго типа Γ . Задача состоит в нахождении ρ_* такого, что для $\forall \rho < \rho_*$ Γ – звездная кривая. То есть надо найти ρ_* такое, чтобы

$$\operatorname{Re} \left(\frac{f(f^{-1}(\rho e^{it}))}{f^{-1}(\rho e^{it}) f'(f^{-1}(\rho e^{it}))} \right) > 0, \forall \rho < \rho_0, \forall t \in \bigcup_l \Omega_l, \forall f \in S.$$

Задача 4. Фиксируем $0 < \rho < \frac{1}{4}$, $w = \rho e^{it}$. Строим линию уровня второго типа Γ для отображения $\forall f \in S$. Определить, будет ли для $\forall f \in S$ Γ – выпуклая кривая.

Задача 5. Фиксируем $0 < \rho < \frac{1}{4}$, $w = \rho e^{it}$. Строим линию уровня второго типа Γ для отображения $\forall f \in S$. Определить, будет ли для $\forall f \in S$ Γ – звездная кривая.

Пусть S_{-1} – множество отображений, обратных отображениям из класса S . То есть $S_{-1} = \{g : \mathbb{C}_w \rightarrow E\}$, где $\mathbb{C}_w = f(E)$, $f \in S$. Тогда задачи 1-5 естественным образом формулируются для класса S_{-1} .

Рассмотрим линии уровня второго типа для отображения Кёбе:

$$f(z) = \frac{z}{(1+z)^2}.$$

Известно, что отображение Кёбе переводит единичный круг в плоскость и линейным разрезом по вещественной оси, один конец которого в точке $\frac{1}{4}$, а второй в бесконечности. Очевидно, что если брать радиус $\rho < \frac{1}{4}$, то линией уровня второго типа будет являться замкнутая кривая, полностью лежащая в единичном круге. На рисунках 1 и 2 изображены линии уровня второго типа при значениях $\rho < \frac{1}{4}$ для отображения Кёбе.

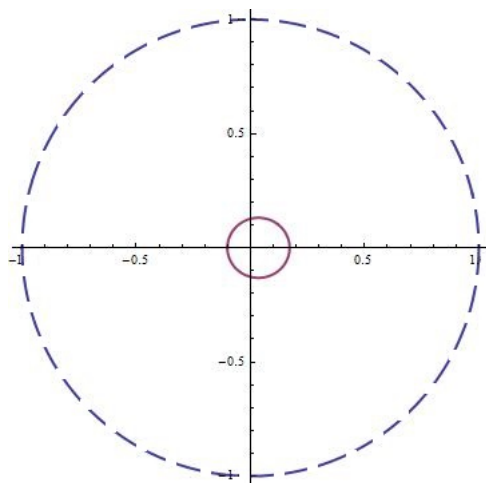


Рис. 1. При $\rho = 0.125$

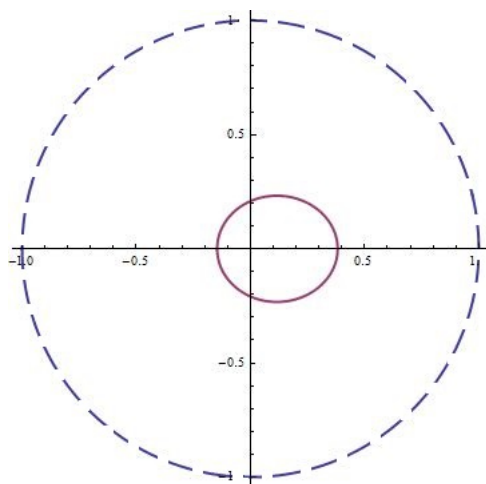


Рис. 2. При $\rho = 0.2$

Если возьмем радиус $\rho \geq \frac{1}{4}$, то линия уровня второго типа будет состоять из двух аналитических дуг, одной из которых является часть единичной окружности. На рисунках 3 и 4 изображены линии уровня второго типа при значениях $\rho > \frac{1}{4}$ для отображения Кёбе.

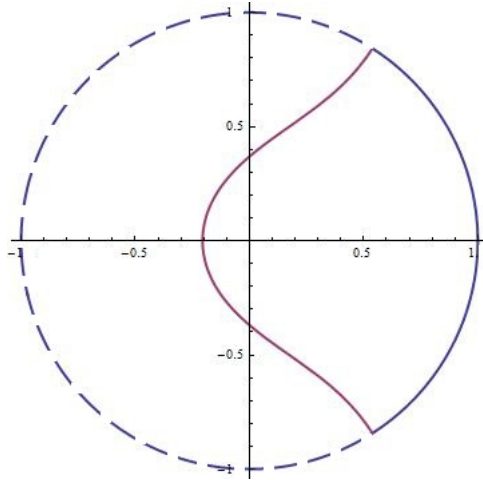


Рис. 3. При $\rho = 0.325$

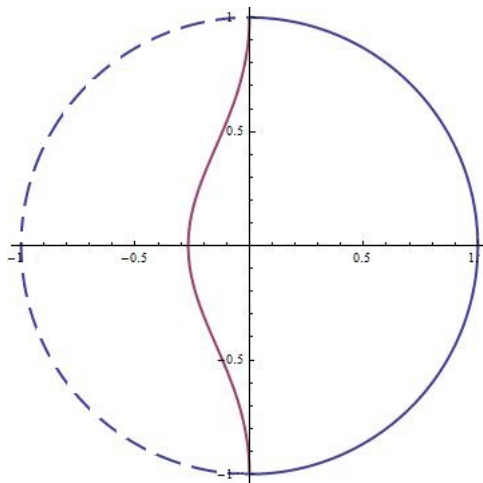


Рис. 4. При $\rho = 0.5$

Литература

1. Александров И.А. Конформные отображения односвязных и многосвязных областей. Изд-во Томского ун-та, 1976.
2. Александров И.А., Копанев С.А. Проблема оценки кривизны линии уровня при конформных отображениях круга //Вестник

Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 6(26), С. 5–17.

3. Александров И.А., Попов В.И. Решение задачи И.В. Базилевича и Г.В. Корицкого о звездообразных дугах линий уровня. // Сибирский математический журнал. 1965. Т. 6. № 1. С. 16–37.

4. Борисова Я.В. Задача о кривизне линии уровня //Сборник статей всероссийской молодежной научной конференции "Все грани математики и механики". 2016. С. 43–49.

Компакты в пространства $C_p(K, S)$

Королев Д. И.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: dracen658@gmail.com

Аннотация

В данной статье рассматривается вопрос о свойстве пространства $C_p(K, S)$ быть ангельским, где K - компактное пространство, а S - прямая Зоргенфрея. Доказывается аналог теоремы Гротендика для этого семейства топологических пространств. Рассматриваемый класс топологических пространств действительно является ангельским. Это, в частности, означает, что для каждого из этих пространств семейства компактных, счетно компактных и секвенциально компактных множеств совпадают. Также это означает, что точка компактного множества такого пространства является пределом последовательности элементов этого множества.

Ключевые слова: ангельское пространство, теорема Гротендика, счетно компактное пространство, относительно счетно компактное пространство, секвенциальная компактность, прямая Зоргенфрея.

Определение 1. Множество A топологического пространства X называется счетно компактным, если из любого счетного покрытия этого множества открытыми множествами можно извлечь конечное подпокрытие.

Согласно теореме из [1] этому определению эквивалентно следующее

Определение 2. Множество A топологического пространства X называется счетно компактным, если для любой последовательности попарно различных элементов этого множества, существует предельная точка, принадлежащая A .

Определение 3. Множество A топологического пространства X называется относительно счетно компактным, если для любой последовательности попарно различных элементов этого множества, существует предельная точка, принадлежащая X .

Ясно, что любое счетно компактное множество относительно счетно компактно.

Определение 4. Множество A топологического пространства X называется *секвенциально компактным*, если любая последовательность элементов данного множества имеет подпоследовательность, сходящуюся в A .

Определение 5. Множество A топологического пространства X называется *относительно секвенциально компактным*, если любая последовательность элементов данного множества имеет подпоследовательность, сходящуюся в X .

Ясно, что любое секвенциально компактное множество относительно секвенциально компактно.

Определение 6. Множество A топологического пространства X называется *относительно компактным*, если \bar{A} является компактным множеством.

Сформулируем определение и критерий ангельского пространства.

Определение 7. Говорят, что хаусдорфово топологическое пространство S является ангельским пространством, если оно обладает следующими тремя свойствами:

(a) следующие утверждения эквивалентны: (i) A относительно компактно, (ii) A относительно счетно компактно, (iii) A относительно секвенциально компактно;

(b) также эквивалентны следующие условия: (iv) A компактно, (v) A счетно компактно, (vi) A секвенциально компактно;

(c) каждая точка замыкания относительно компактного множества A есть предел последовательности в A .

Лемма 1. S является ангельским тогда и только тогда, когда условие (ii) влечет условие (i) и выполнено условие (c).

Сформулируем две леммы, из которых следует, что для любого компактного пространства K $C_p(K)$ является ангельским пространством. Первая лемма носит название Теорема Гротендика.

Лемма 2. Пусть K компактное пространство и пусть A есть относительно счетно компактное множество в $C_p(K)$ и ψ есть произвольная точка из $\overline{A}^{\mathbb{R}^K}$. Тогда существует последовательность $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ элементов множества A и функция $f \in C_p(K)$, такие, что $f_n \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$ в пространстве $C_p(K)$ и $\psi = f$.

Лемма 3. Пусть K компактное пространство. Тогда любое относительно счетно компактное множество A в $C_p(K)$ является относительно компактным.

Теперь сформулируем ряд фактов, и докажем две теоремы, аналогичные двум предыдущим леммам.

Факт 1. Из любого относительно счетно компактного подмножества A прямой Зоргенфрея S нельзя извлечь строго возрастающую последовательность точек.

Факт 2. Пусть f - вещественнозначная функция заданная на компакте K . Для того, чтобы функция f была непрерывна относительно топологии стрелки Зоргенфрея на \mathbb{R} необходимо и достаточно, чтобы эта функция была непрерывной относительно евклидовой топологии на вещественной прямой и каждая точка компакта K являлась точкой локального минимума функции f .

Вкратце этот результат можно записать так: $f \in C(K, S) \Leftrightarrow f \in C(K)$ и каждая точка компакта K являлась точкой локального минимума функции f .

Из этого факта непосредственно следует, что $C(K, S) \subset C(K)$.

Для каждого $x \in K$ заведём функцию $\pi_x : C_p(K, S) \rightarrow S$ проецирования на координату x , которая действует по правилу $\pi_x(f) = f(x)$. Эта функция обладает свойством непрерывности. Тогда очевиден следующий

Факт 3. Образ компактного подмножества A пространства $C_p(K, S)$ относительно отображения π_x также компактен.

На самом деле если в формулировке этого факта перед словами «компактного» и «компактен» написать «счетно» или «относительно» или «относительно счетно», то утверждения, которые будут получаться, также будут верны. Будут они верны в том случае, когда $A \subset S^K$

Факт 4. Каждая предельная точка f множества A в $C_p(K, S)$ также является предельной точкой этого множества в пространстве $C_p(K)$. Вкратце это утверждение можно записать так: $\overline{A}^{C_p(K, S)} \subset \overline{A}^{C_p(K)}$.

Доказательство. Пусть f есть предельная точка множества A в $C_p(K, A)$. Тогда любая её окрестность $W^S = W^S(f; x_1, \dots, x_n; \varepsilon)$ имеет с A непустое пересечение. Несложно проверить следующее включение $W^S = W^S(f; x_1, \dots, x_k; \varepsilon) = \{g \in C(K, S) | g(x_i) \in [f(x_i), f(x_i) +$

$\varepsilon)\forall i = 1, \dots, k\} \subset \{g \in C(K) | g(x_i) \in (f(x_i) - \varepsilon, f(x_i) + \varepsilon)\forall i = 1, \dots, k\} = W(f; x_1, \dots, x_k; \varepsilon) = W$. Очевидно, что каждая окрестность $W(f; x_1, \dots, x_k; \varepsilon)$ точки f в $C_p(K)$ имеет с A непустое пересечение, что означает, что f есть предельная точка для множества A в пространстве $C_p(K)$.

Замечание 1. Так как в доказательстве по сути не использовалось свойство непрерывности функции f , то его можно провести и для функций, не являющихся непрерывными. Тогда будет верно утверждение: $\overline{A}^{S^K} \subset \overline{A}^{\mathbb{R}^K}$.

Факт 5. Если множество A относительно счетно компактно в $C_p(K, S)$, то оно относительно счетно компактно в $C_p(K)$.

Доказательство. Надо доказать, что для произвольной последовательности $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ попарно различных элементов из A существует предельная точка в $C_p(K)$. Непосредственно из условий утверждения вытекает, что существует точка f , являющаяся предельной для последовательности $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ в пространстве $C_p(K, S)$. Но согласно предыдущему факту, эта же точка f является предельной для этой последовательности и в $C_p(K)$.

Теорема 1. Пусть K компактное пространство и пусть A есть относительно счетно компактное множество в $C_p(K, S)$ и ψ есть произвольная точка из \overline{A}^{S^K} . Тогда существует последовательность $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ элементов множества A и функция $f \in C_p(K, S)$, такие, что $f_n \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$ в пространстве $C_p(K, S)$ и $\psi = f$.

Доказательство. Согласно замечанию к факту 4 мы имеем $\psi \in \overline{A}^{S^K} \subset \overline{A}^{\mathbb{R}^K}$, а из факта 5 следует, что A относительно счетно компактно в $C_p(K)$. Тогда выполняются условия теоремы Гротендика. По этой теореме существует последовательность $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ элементов множества A и функция $f \in C_p(K)$, такие, что $f_n \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$ в пространстве $C_p(K)$ и $\psi = f$.

Докажем, что $f_n \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$ в пространстве S^K . Для этого нужно доказать, что в произвольной окрестности $W^S = W^S(f; x_1, \dots, x_k; \varepsilon)$ точки f в пространстве S^K находятся все элементы этой последовательности, с номерами большими некоторого номера \tilde{n} . Сходимость $f_n \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$ в пространстве $C_p(K)$ означает, что существует номер n_0 , такой, что для всех $n \geq n_0$ и для всех $i = 1, \dots, k$ верно неравенство $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$.

Рассмотрим отдельно последовательность точек $f_n(x_i)$, где $i = 1, \dots, k$. Эта последовательность сходится к $f(x_i)$ при $n \rightarrow \infty$. Введем следующие обозначения $I_m = (f(x_i) - \frac{1}{2^m}, f(x_i) + \frac{1}{2^{m+1}}]$. Согласно факту 3 $\pi_{x_i}(A)$ относительно счетное компактное множество в S , а согласно факту 1 из $\pi_{x_i}(A)$ нельзя извлечь строго возрастающую последовательность точек. Отсюда следует, что существует номер m_i (можно взять такой номер m_i , что $\frac{1}{m_i} < \varepsilon$), что для всех $m \geq m_i$ и для любого натурального n будет верно, что $f_n(x_i) \notin I_m$. Это означает, что $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cap (f(x_i) - \frac{1}{m_i}, f(x_i)) = \emptyset$. Очевидно, что существует номер n_i , который для определенности можно считать большим чем n_0 , такой, что для всех $n \geq n_i$ выполняется включение $f_n(x_i) \in [f(x_i), f(x_i) + \frac{1}{m_i}]$.

Положим $\tilde{n} = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Тогда мы получаем, что для любого натурального $n \geq \tilde{n}$ и для любого индекса $i = 1, \dots, k$ будет верно следующее включение $f_n(x_i) \in [f(x_i), f(x_i) + \frac{1}{m_i}] \subset [f(x_i), f(x_i) + \varepsilon)$. Это означает, что для любого натурального $n \geq \tilde{n}$ выполнено $f_n \in W^S(f; x_1, \dots, x_k; \varepsilon)$. Таким образом мы получили, что $f_n \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$ в пространстве S^K .

Чтобы завершить доказательство надо показать, что $f \in C_p(K, S)$. Так как A относительно счетно компактно в $C_p(K, S)$, то существует точка $h \in C_p(K, S)$, предельная для $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, или же (если мощность этой последовательности конечна), совпадающая с бесконечным количеством членов этой последовательности. Эта функция также принадлежит пространству S^K , и легко проверяется, что она совпадает с функцией f . Пусть это не так. Пусть $f \neq h$. Тогда существует точка k_0 , в которой обе эти функции принимают разные значения $f(k_0)$ и $h(k_0)$. Так как S хаусдорфово пространство, то существует $\varepsilon > 0$, такой, что $[f(k_0), f(k_0) + \varepsilon) \cap [h(k_0), h(k_0) + \varepsilon) = \emptyset$. Начиная с некоторого номера все $f_n(k_0)$ принадлежат $[f(k_0), f(k_0) + \varepsilon)$. С другой стороны, в $[h(k_0), h(k_0) + \varepsilon)$ попадает бесконечное число членов последовательности $\{f_n(k_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Но эти два утверждения противоречат друг другу. Таким образом функции h и f совпадают. Но тогда $f \in C_p(K, S)$.

Факт 6. Для любого несчетного подмножества A прямой Зоргенфрея существует точка a , принадлежащая этому множеству, такая, что $(a, +\infty) \cap A$ также несчетно.

Факт 7. Любое относительно счетно компактное множество A прямой Зоргенфрея счетно.

Доказательство. Допустим противное, а именно то, что A несчетное. Тогда существует точка $a_0 \in A$, что множество $A_1 = (a_0, +\infty) \cap A$ несчетно. Но тогда существует точка $a_1 \in A_1$, что множество $A_2 = (a_1, +\infty) \cap A_1$ несчетно. Таким образом можно по индукции построить строго возрастающую последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, состоящую из элементов множества A . Это противоречит факту 1.

Факт 8. *Если A относительно счетно компактно в S , то \overline{A} счетно компактно.*

Доказательство. Согласно определению надо доказать, что для последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ попарно различных элементов множества \overline{A} существует предельная точка в нём же. Не сложно проверить, что эта последовательность ограничена (!!!проверь!!!). $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет предельную точку x в \mathbb{R} . Покажем, что эта же точка будет предельной для последовательности и в S .

Для всех $i \in \mathbb{N}$ ведем обозначения $I_i = [x - \frac{1}{2^i}, x - \frac{1}{2^{i+1}})$. Очевидно, существует натуральное m , такое, что для всех $i \geq m$ будет выполнено $I_i \cap \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \emptyset$. Получается, что $[x - \frac{1}{2^m}, x) \cap \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \emptyset$. Из этого, а также из того, что x является предельной точкой для $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ в \mathbb{R} , следует, что эта точка будет предельной для этой последовательности и в S . А так как она предельная, то принадлежит \overline{A} .

Факт 9. *Любое счетно компактное множество $A \subset S$ является компактным.*

Доказательство. Любое счетно компактное множество является относительно счетно компактным, следовательно, согласно факту 7, A является счетным множеством. Тогда из любого покрытия A открытыми множествами можно извлечь счетное подпокрытие, из которого, как следует из определения счетно компактно множества, можно извлечь конечное. Это означает, что A является компактным.

Факт 10. *Любое относительно счетно компактное множество $A \subset S$ является относительно компактным.*

Доказательство. Данный факт является следствием предыдущих двух.

Факт 11. *Любое относительно счетно компактное множество $A \subset S^K$ является относительно компактным.*

Доказательство. Согласно фактам 3 и 10 для каждого $x \in K$ множество $\overline{\pi_x(A)}$ компактно. Тихоновское произведение $\prod\{\overline{\pi_x(A)}\}_{x \in K}$ является компактом. Очевидно, что \overline{A} лежит в этом компакте, следовательно само является компактом.

Теорема 2. Пусть K компактное пространство. Тогда любое относительно счетно компактное множество A в $C_p(K, S)$ является относительно компактным.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что $\overline{A}^{C_p(K, S)} = \overline{A}^{S^K}$. Из факта 11 следует, что \overline{A}^{S^K} компактно в S^K , а это влечет, что $\overline{A}^{C_p(K, S)}$ в компактно $C_p(K, S)$.

Из теорем 1 и 2 следует, что для любого компактного пространства K $C_p(K, S)$ является ангельским пространством.

Литература

1. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
2. Pryce J. D. A device of R. J. Whitley's applied to pointwise compactness in spaces of continuous functions // Proceedings of the London Math. Soc. (3) 23 (1971) 532–546.

Геометрический метод изучения аналитических свойств негомеоморфных пространственных отображений

Новик А. В., Малютина А. Н.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: novik.anastasiia@mail.ru

Аннотация

В данной работе мы продолжаем развивать геометрический метод модулей семейств кривых, а именно описываем метод для изучения свойств отображений с s -усредненной характеристикой, – это метод, основанный на специальном характеристическом законе искажения модуля семейств кривых.

Метод модулей является мощным средством для изучения различных свойств негомеоморфных пространственных отображений. Он опирается на неравенства, описывающие поведение модуля семейства кривых, когда семейство преобразуется данным отображением, а также на некоторые оценки для модулей.

Полученные в работе результаты позволяют установить эквивалентность аналитического и геометрического определений для отображений с s -усредненной характеристикой.

Ключевые слова: отображения с s -усредненной характеристикой, модуль семейства кривых, пространственный.

Определение 1. Пусть Γ – некоторое семейство кривых в \overline{R}^n . Борелевскую функцию $p : R^n \rightarrow [0; \infty]$ назовем допустимой метрикой семейства Γ , если $\int_{\gamma} p dl_x \geq 1$ для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$, где $dl_x = \frac{dx}{1+|x|^2}$ [1].

В дальнейшем запись $p \wedge \Gamma$ будет означать, что p есть допустимая метрика семейства Γ .

Определение 2. Сферический модуль семейства Γ определим по формуле $M_{\alpha} = \inf \int_{R^n} p^{\alpha} d\sigma_x$, где $d\sigma_x = \frac{dx}{(1+|x|^2)^n}$ и \inf берется над классом всевозможных метрик $p \wedge \Gamma$ [1].

Определение 3. Метрику p_0 назовем экстремальной, если для некоторой метрики $p_0 \wedge \Gamma$ имеем $M_{\alpha}(\Gamma) = \int_{R^n} p_0^{\alpha} d\sigma_x$.

Определение 4. Семейства Γ_i , $i=1,2,\dots$, назовем *отделенными*, если существуют непересекающиеся борелевские множества $E_i \subset \overline{R}^n$ такие, что для любой поверхности $\gamma_i \in \Gamma_i$ имеет место $\Lambda_i(\gamma_i \setminus \Gamma_i) = 0$.

Укажем основные свойства модулей и докажем некоторые из них:

1. Если $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, то $M_\alpha(\Gamma_1) \leq M_\alpha(\Gamma_2)$.

2. $M_\alpha(\cup_{i=1}^\infty \Gamma_i) \leq \sum_{i=1}^\infty M_\alpha(\Gamma_i)$ -свойство полуаддитивности кривых.

Можно допустить, что $M_\alpha(\Gamma_i) < \infty$, так как в противном случае требуемое неравенство имеет место $\forall \varepsilon > 0$ выберем метрику $p_i \wedge \Gamma$ такую что $\int_{R^n} p_i^n d\sigma_x < M_\alpha(\Gamma_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$. Проверим, что функция $p = (\sum_{i=1}^\infty p_i^n)^{1/n}$ является допустимой метрикой для семейства $\Gamma = \cup_{i=1}^\infty \Gamma_i$. В самом деле $p \geq p_i$ для всех i . Таким образом имеем, что $M_\alpha(\cup_{i=1}^\infty \Gamma_i) \leq \sum_{i=1}^\infty M_\alpha(\Gamma_i) = M_\alpha(\Gamma) \leq \int_{R^n} p^\alpha d\sigma_x = \sum_{i=1}^\infty \int_{R^n} p_i^\alpha d\sigma_x < \varepsilon + \sum_{i=1}^\infty M_\alpha(\Gamma_i) \leq \sum_{i=1}^\infty M_\alpha(\Gamma_i)$

Используя свойства 1 и 2 легко доказать свойство 3.

3. Модуль $M_\alpha(\Gamma)$ является внешней мерой в пространстве всех кривых в R^n .

4. Если семейства Γ_i , $i = 1, 2, \dots$, отделены, то $M_\alpha(\cup_{i=1}^\infty \Gamma_i) = \sum_{i=1}^\infty M_\alpha(\Gamma_i)$.

5. Если $\Gamma_1 < \Gamma_2$, то $M_\alpha(\Gamma_1) \geq M_\alpha(\Gamma_2)$.

6. Если семейства Γ_i , $i = 1, 2, \dots$, отделены и $\Gamma < \Gamma_i$ для всех i , то $M_\alpha(\Gamma) \geq \sum_{i=1}^\infty M_\alpha(\Gamma_i)$.

7. Если семейства Γ_i , $i = 1, 2, \dots$, отделены и каждая кривая γ семейства Γ состоит из одной кривой γ_1 семейства Γ_1 и одной кривой γ_2 семейства Γ_2 , то $M_\alpha(\Gamma)^{1/(1-n)} \geq M_\alpha(\Gamma_1)^{1/(1-n)} + M_\alpha(\Gamma_2)^{1/(1-n)}$.

8. Если семейства Γ_i , $i = 1, 2, \dots$, отделены и $\Gamma_i < \Gamma$, то $M_\alpha(\Gamma)^{1/(1-n)} \geq \sum_{i=1}^\infty M_\alpha(\Gamma_i)^{1/(1-n)}$.

9. Семейство Γ исключительно тогда и только тогда, когда существует неотрицательная борелевская функция $p \in L_n(R^n)$ такая, что $\int_{\gamma_i} p dl = \infty$.

10. Если последовательность неотрицательных борелевских функций $p_m \in L_n(R^n)$ сходится в среднем с показателем n к некоторой функции p , т.е. $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{R^n} |p_m - p|^n dx = 0$, то существует последовательность p_{m_i} , $i = 1, 2, \dots$, последовательности p_m такая, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_\gamma |p_{m_i} - p| dl = 0$.

11. $M_\alpha(\Gamma)$ не изменится, если в $M_\alpha(\Gamma) = \inf \int_{R^n} p^\alpha d\sigma_x$, \inf брать над классом метрик, обобщенно -допустимых для семейства Γ .

Теорема 1. Экстремальная метрика семейства Γ определяется единственным образом (с точностью до значений на множестве n -мерной меры ниль).

Доказательство. Пусть p_{01} и p_{02} - две экстремальные метрики семейства Γ . Введем функцию $p = (\frac{p_{01}+p_{02}}{2})$. Докажем, что $p \wedge \Gamma$ допустимая мера для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$ имеем $\int_{\gamma} p_{01} dl_x \geq 1$ и $\int_{\gamma} p_{02} dl_x \geq 1$, то $\int_{\gamma} p dl_x = 1/2 \int_{\gamma} p_{01} dl_x + 1/2 \int_{\gamma} p_{02} dl_x \geq 1$. С другой стороны, так как функция $(\frac{a^t+b^t}{2})^{1/t}$, $a > 0$, $b > 0$, является возрастающей функцией от t , $t > 0$, и следовательно, выполняется неравенство $(\frac{p_{01}+p_{02}}{2}) \leq (\frac{p_{01}^{\alpha}+p_{02}^{\alpha}}{2})^{1/\alpha}$, причем знак равенства имеет место в тех и только тех точках x , в которых $p_{01}(x) = p_{02}(x)$. Отсюда следует, что $\int_{R^n} p^{\alpha} d\sigma_x = \int_{R^n} (\frac{p_{01}+p_{02}}{2})^{\alpha} d\sigma_x \leq 1/2 \int_{R^n} p_{01}^{\alpha} d\sigma_x + 1/2 \int_{R^n} p_{02}^{\alpha} d\sigma_x = M_{\alpha}(\Gamma)$, а так как, по определению модуля, знак неравенства здесь не может иметь места, то почти всюду в $(\frac{p_{01}+p_{02}}{2}) \leq (\frac{p_{01}^{\alpha}+p_{02}^{\alpha}}{2})^{1/\alpha}$ имеет место знак равенства. Следовательно, $p_{01} = p_{02}$ почти всюду в R^n .

Пример 1. Пусть D есть цилиндрическое кольцо $x = (r, \varphi, x_3) : 0 < \varphi < 2\pi, r_1 < r < r_2, 0 < x_3 < H$, где (r, φ, x_3) -цилиндрические координаты в R^3 , и Γ -семейство всевозможных кривых γ , соединяющих в D внутреннюю и внешнюю боковые поверхности D . Тогда $M_{\alpha}(\Gamma) = \frac{\pi H}{2(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_1})^2}$. В самом деле, функция

$$p_0 = \begin{cases} \frac{1+|x|^2}{2(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_1})\sqrt{r}}, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases} \quad (1)$$

является допустимой и экстремальной метрикой для семейства Γ :

$$\int_{\gamma} p_0 \frac{dl}{2(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_1})\sqrt{r}} = \frac{1}{2(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_1})} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{r}} = 1$$

Предложение. Если D -вырожденное кольцо, то в настоящей работе мы доказываем $M_{\alpha}(\Gamma) = \frac{\pi H}{2r_2}$.

В самом деле, используя метрику (1), получаем, что $\int_D p_0^3 d\sigma_x = \int_D \frac{p_0^3(1+|x|^2)^3}{(1+|x|^2)^3} dx = \frac{\pi H}{4(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_1})^3} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{r}} = \frac{\pi H}{2(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_1})^2}$. Устремляя $r_1 \rightarrow 0$ получаем требуемое.

Назовем гомеоморфизм $f : D \rightarrow D'$ отображением класса $\widetilde{W}_{n,loc}^1(D)$,

если $f \in W_{n,loc}^1(D), f^{-1} \in W_{n,loc}^1(D')$ и обладает N, N^{-1} свойствами.

Пусть D -область в R^n , $f : D \rightarrow R^n$ непрерывное отображение. Для подобласти $G \subset D$ такой, что $\overline{G} \subset D$ и точки $y \in f(D) \setminus f(\partial G)$ под символом $\mu(y, f, G)$ понимаем степень (топологический индекс)

тройки (y, f, G) [2].

Если $x \in G$ имеет связную окрестность G такую, что $\bar{G} \subset D$ $G \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$, то $\mu(f(x), g, G)$ не зависит от выбора G и обозначается через $i(x, f)$.

Говорят, что отображение f сохраняет ориентацию на D , если $\mu(y, f, G) > 0$ для произвольно выбранной подобласти $G \subset D$ и точки $y \in f(D) \setminus f(\partial G)$; меняет ориентацию на D , если $\mu(y, f, G) < 0$ для всех таких троек (y, f, G) ; f -удовлетворяет условию N , если образ каждого множества меры нуль имеет меру нуль.

Для множества $G \subset D$ и точки $y \in R^n$ через $N(y, f, G)$ обозначим (конечное или бесконечное) число точек множества $G \cap f^{-1}(y)$, при этом полагаем $N(f, G) = \sup_{y \in R^n} N(y, f, G)$.

Для отображения $f \in \widetilde{W}_{n,loc}^1(D)$, определены следующие величины: -внутренняя дилатация отображения f в точке x

$$K_I(x, f) = \frac{|J(x, f)|}{l^n(f, x)}, \text{ где } l(x, f) = l(f'(x)) = \min_{|h|=1} |f'(x)h|$$

-внешняя дилатация отображения f в точке x

$$K_O(x, f) = \frac{L^n(f, x)}{|J(x, f)|}, \text{ где } L(x, f) = |f'(x)| = \max_{|h|=1} |f'(x)h|, \text{ а так-}$$

$$\text{же } \lambda(x, f) = n^{-\frac{n}{2}} \frac{|\nabla f(x)|^n}{|J(x, f)|}, K(x, f) = \frac{L(x, f)}{l(x, f)}$$

При этом справедливы оценки: $K_I(x, f) \leq K_O^{n-1}(x, f)$,

$K_O(x, f) \leq n^{\frac{n}{2}} \lambda(x, f) \leq n^{\frac{n}{2}} K_O(x, f) \leq n^{\frac{n}{2}} K_I^{n-1}(x, f)$ и неравен-

ства, связывающие характеристики между собой

$$K(x, f) \leq \min(K_I(x, f), K_O(x, f)) \leq K^{\frac{n}{2}}(x, f) \leq \max(K_I(x, f),$$

$$K_O(x, f)) \leq K^{n-1}(x, f).$$

Дадим теперь определение отображения с s -усредненной характеристикой.

Определение 5. *Отображение $f : D \rightarrow R^n$ называется отображением с $K_{O,S}$ усредненной характеристикой, если 1) f -непрерывное, открытое, изолированное и $f \in \widetilde{W}_{n,loc}^1(D)$ 2) Существует постоянная $K_{O,S} \geq 0$, такая, что выполнено неравенство $K_{O,S}(f) = (\int_D K_O^s(x, f) d\sigma_x)^{\frac{1}{s}} \leq K_{O,S}$*

Определение 6. *Отображение f называется отображением с $K_{O,S}^*$ усредненной характеристикой, если 1) f -непрерывное, открытое, изолированное и $f \in \widetilde{W}_{n,loc}^1(D)$ 2) Существует постоянная $K_{O,S}^* \geq 0$, такая, что выполняется неравенство*

$$K_{O,S}^*(f) = (\int_D K_O^s(x, f) J(x, f) d\sigma_x)^{\frac{1}{s}} \leq K_{O,S}^*.$$

Определение 7. *Отображение $f, f : D \rightarrow R^n$ называется отображением с $K_{I,S}$ усредненной характеристикой, если 1) f - непре-*

рывное, открытое, изолированное и $f \in \widetilde{W}_{n,loc}^1(D)$ 2) Существует постоянная $K_{I,S} \geq 0$, такая, что выполняется неравенство $K_{I,S}(f) = (\int_D K_I^s(x, f) d\sigma_x)^s \leq K_{I,S}$ [3].

В следующей теореме мы докажем оценку искажения модулей семейств кривых, с целью получить геометрическое определение с $K_{I,S}$ -усредненной характеристикой.

Теорема 2. *Предположим, что $f : D \rightarrow D'$ отображение с $K_{O,S}$ -усредненной характеристикой $s \geq 1$. Пусть A -борелевское множество в D , такое, что $N(f, A) < \infty$. Если Γ -семейство кривых в A , то выполнено неравенство $M^{s-1}(\Gamma) \leq N^s(f, A)(K_{I,S})^{s-1}C(n, A)M_{\frac{n.s}{s-1}}^s(f\Gamma)$.*

Доказательство. Предположим, что $\rho^* \wedge f\Gamma$. Определим теперь функцию $\rho : R^n \rightarrow R^1$ следующим образом:

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho^*(f(x))L(x, f) \frac{1+|x|^2}{1+|y|^2 \frac{s-1}{s}}, & x \in A \\ 0, & x \notin \bar{A} \end{cases} \quad (2)$$

Покажем, что $\rho \wedge f\Gamma$.

Функция $\rho(x)$ измерима по Борелю, как композиция измеримых борелевских функций.

Пусть Γ_0 -семейство всех спрямляемых кривых $\gamma \in \Gamma$ таких, что f абсолютно непрерывно на γ . Тогда, если γ^0 параметризация γ посредством ее длины дуги, то $f \circ \gamma^0$ абсолютно непрерывно и $M(\Gamma_0) = M(\Gamma)$ [4].

По определению метрики $\rho(x)$

$$\int_{\gamma} \rho ds_x = \int_{\gamma} \rho^*(f(x))L(x, f) \frac{ds}{(1+|y|^2) \frac{s-1}{s}}$$

По следствию теоремы 5.3 [5]. Следует, что $\int_{\gamma} \rho ds_x \geq \int_{\gamma} \rho^*(y)(1+|y|^2)^{\frac{1}{s}} \frac{ds}{1+|y|^2} = \int_{\gamma} \rho^*(y) ds_y \geq 1$ (1')

Из того, что $\rho^* \wedge f\Gamma$ и выполнено (1'), следует, что $\rho \wedge f\Gamma_0$ для $\forall \gamma \in \Gamma_0$. Оценим теперь модуль порядка n семейства Γ . Так как $J(x, f) \neq 0$ почти всюду в D , тогда $M_n(\Gamma_0) = M_n(\Gamma) \leq \int_{R^n} \rho^n d\sigma_x = (\int_A [\rho^*(f(x))]^n |J(x, f)|)^{\frac{s-1}{s}} \frac{(1+|x|^2)^n}{(1+|y|^2)^{\frac{n(s-1)}{s}}} \frac{L^n(x, f)}{|J(x, f)|^{\frac{s-1}{s}}} d\sigma_x)^{\frac{s-1}{s}}$

Применяя к последнему интегралу неравенство Гельдера с показателями $p = \frac{s}{s-1}$ и $q = \frac{1}{s}$, получаем

$$M_n(\Gamma) \leq (\int_A [\rho^*(f(x))]^{\frac{n.s}{s-1}} \frac{|J(x, f)| dx}{(1+|y|^2)^n})^{\frac{s-1}{s}} (\int_A \frac{L^n(x, f)}{|J(x, f)|} s |J(x, f)| d\sigma_x)^{\frac{1}{s}} \quad (2')$$

Оценим первый интеграл из правой части неравенства (2') используя теорему о замене переменных [6].

$$I_1 = \int_{R^n} [\rho^*(f(x))]^{\frac{ns}{s-1}} N(y, f, A) \left| \frac{dy}{(1+|y|^2)^n} \right| \leq N(f, A) \int_{R^n} [\rho^*(f(x))]^{\frac{ns}{s-1}} d\sigma_y \leq N(y, f, A) M_{\frac{ns}{s-1}}(f\Gamma) \quad (3')$$

Оценим второй интеграл из правой части неравенства (2'). Используя, связывающие характеристики неравенства, имеем

$$I_2 = \int_A \left(\frac{L^n(x, f)}{|J(x, f)|} \right)^s |J(x, f)| d\sigma_x = \int_A K_0^s(x, f) |J(x, f)| d\sigma_x \quad (4')$$

Объединяя оценки (2'), (3'), (4'), получаем неравенство

$M^{s-1}(\Gamma) \leq N^s(f, A) (K_{I, S})^{s-1} C(n, A) M_{\frac{ns}{s-1}}^s(f\Gamma)$, которое и доказывает нашу теорему.

Из теоремы 1 можно получить следствие:

Теорема 3. Пусть $D, D' \subset R^n$ -области, $f: D \rightarrow D'$ -отображение с $K_{O, S}^*$ -усредненной характеристикой, $s > 1$. Пусть $A \subset D$ - борелевское множество, такое, что $N(f, A) < \infty$. Тогда существует ограниченная, неотрицательная, аддитивная, абсолютно непрерывная функция $\Phi_{O, S}^*(A)$ борелевских множеств в D такая, что для любого семейства кривых $\Gamma \subset A$ выполнено неравенство

$$M_n^s(\Gamma) \leq N^{s-1}(f, A) \Phi_{O, S}^*(A) M_{\frac{ns}{s-1}}^{s-1}(f\Gamma),$$

где $\Phi_{O, S}^*(A) = \int_A K_0^s(x, f) |J(x, f)| d\sigma_x$ и $N(f, A)$ -кратность отображения f [2].

Литература

1. А. Новик., А.Н. Малютина. Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского / Казанское математическое общество. Теория функций, её приложений и смежные вопросы // Материалы Тринадцатой Казанской летней научной школы - конференции. - Казань: Издательство Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ. 2017. Т. 54. - 420 с.
2. Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
3. Сычев А.В. Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983.
4. Полецкий Е.А. Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений. // Сборник. 1970. Т. 83(125), № 2(10). С. 261-273.
5. Vaisala Ju. Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings .- Lectures Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1971. - 144 p.
6. Rado T., Reichelderfer R.V. Continuous transformation in analisis.-Springer-Verlag. Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1955. - 442 p.

Формулы типа формул Пуассона и Шварца на классах отображений с симметрией переноса

Хабарова Е. Л., Копанева Л. С.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: flo-00@mail.ru

Аннотация

Ранее был введен в рассмотрение класс отображений $X_{2\pi}$ с симметрией переноса вдоль вещественной оси, для них получены формула типа формулы Пуассона и формула типа формулы Шварца. В данной работе рассмотрены два класса $X_{2\pi, 2\pi\lambda}$, $X_{2\pi\mu, 2\pi}$ голоморфных и однолистных в верхней полуплоскости отображений с симметрией переноса вдоль вещественной оси, непрерывно продолжаемых на вещественную ось и удовлетворяющих дополнительным условиям. Получены формула типа формулы Пуассона и формула типа формулы Шварца для отображений из рассмотренных классов.

Ключевые слова: Отображение с симметрией переноса, голоморфность, однолиственность, верхняя полуплоскость, формула Пуассона, формула Шварца.

Определение 1. Область D комплексной w -плоскости будем называть областью с симметрией переноса вдоль вещественной оси, если $D = L(D)$, где $L(w) = w + T$, $T > 0$.

Определение 2. Отображение f из верхней комплексной полуплоскости $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$ на $D \subset \mathbb{C}$ будем называть отображением с симметрией переноса вдоль вещественной оси, если D – область с симметрией переноса вдоль вещественной оси.

Для каждого отображения с симметрией переноса вдоль вещественной оси предел $\lim_{\text{Im}z \rightarrow +\infty} f(z)$, равномерный относительно $\text{Re}z \in \mathbb{R}$, существует тогда и только тогда, когда существует равномерный относительно $\text{Re}z \in [a, a + t]$, $a \in \mathbb{R}$, предел $\lim_{\text{Im}z \rightarrow +\infty} f(z)$. Будем обозначать этот предел $\lim_{\text{Im}z \Rightarrow +\infty} f(z)$

Определение 3. Множество всех голоморфных и однолистных в верхней полуплоскости $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$ отображений $f : \Pi^+ \rightarrow \mathbb{C}$, для которых $f(\Pi^+) = D$ есть односвязная область с симметрией переноса вдоль вещественной оси типа полуплоскости, удовлетворяющих условиям:

1. $f(z + 2\pi k) = f(z) + 2\pi\lambda k, k \in \mathbb{Z}$;
2. $\lim_{\text{Im}z \Rightarrow +\infty} (f(z) - \lambda z) = 0, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

будем называть классом $X_{2\pi, 2\pi\lambda}$ (рисунок 1).

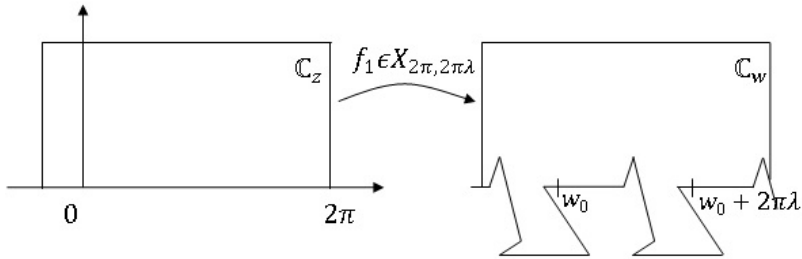


Рис. 1.

Определение 4. Множество всех голоморфных и однолистных в верхней полуплоскости $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$ отображений $f : \Pi^+ \rightarrow \mathbb{C}$, для которых $f(\Pi^+) = D$ есть односвязная область с симметрией переноса вдоль вещественной оси типа полуплоскости, удовлетворяющих условиям:

1. $f(z + 2\pi\mu k) = f(z) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
2. $\lim_{\text{Im}z \Rightarrow +\infty} (f(z) - \frac{1}{\mu}z) = 0, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

будем называть классом $X_{2\pi\mu, 2\pi}$ (рисунок 2).

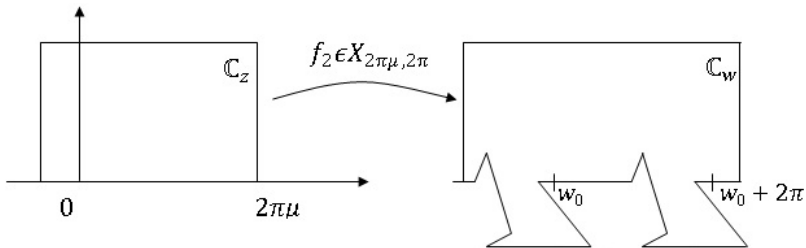


Рис. 2.

Следующую теорему будем называть формулой типа формулы Пуассона.

Теорема 1. Для голоморфного в верхней полуплоскости отображения f_1 с симметрией переноса вдоль вещественной оси, непрерывно продолжаемого на вещественную ось и удовлетворяющего условиям:

$$f_1(z + 2\pi k) = f_1(z) + 2\pi\lambda k, k \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$\lim_{Imz \Rightarrow +\infty} (f_1(z) - \lambda z) = A, A \in \mathbb{C}, Imz > 0,$$

справедлива формула

$$Imf_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Im \operatorname{ctg} \frac{x-z}{2} Imf_1(x) dx + \lambda Imz.$$

А для голоморфного в верхней полуплоскости отображения f_2 с симметрией переноса вдоль вещественной оси, непрерывно продолжаемого на вещественную ось и удовлетворяющего условиям:

$$f_2(z + 2\pi\mu k) = f_2(z) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$\lim_{Imz \Rightarrow +\infty} (f_2(z) - \frac{1}{\mu} z) = A, A \in \mathbb{C}, Imz > 0,$$

справедлива формула

$$Imf_2(z) = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{2\pi\mu} Im \operatorname{ctg} \frac{x-z}{2\mu} Imf_2(x) dx + \frac{1}{\mu} Imz.$$

Доказательство. Представим верхнюю полуплоскость в виде $\Pi^+ = \bigcup_{\eta>0} \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Delta_{k\eta}^2$, где $\Delta_{k\eta}^2$ есть прямоугольник с вершинами в точках $a_{2,1} = 2\pi\mu k$, $a_{2,2} = 2\pi\mu(k+1)$, $a_{2,3} = 2\pi\mu(k+1) + i\eta$, $a_{2,4} = 2\pi\mu k + i\eta$, $\eta > 0$.

Пусть $z \in \Delta_{0\eta}^2$, что не умаляет общности, в силу свойства $f_2(z + 2\pi\mu k) = f_2(z) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ отображения f_2 с симметрией переноса вдоль вещественной оси.

По интегральной формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_{0\eta}^2} \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f_2(z),$$

а по интегральной теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_{0\eta}^2} \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z - 2\pi\mu k} d\zeta = 0, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_{0\eta}^2} \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - \bar{z} - 2\pi\mu k} d\zeta = 0, k \in \mathbb{Z}, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Вычитая из суммы интегралов, записанных для z , сумму инте-

гралов, записанных для \bar{z} , получим

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_{0\eta}^2} \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_{0\eta}^2} \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z - 2\pi\mu k} d\zeta - \\ &\quad - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_{0\eta}^2} \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - \bar{z} - 2\pi\mu k} d\zeta = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_{0\eta}^2} \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z - 2\pi\mu k} d\zeta - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_{0\eta}^2} \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - \bar{z} - 2\pi\mu k} d\zeta. \end{aligned}$$

В силу равномерной сходимости на границе $\partial\Delta_{0\eta}^2$ рядов

$$S_1(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\zeta - z - 2\pi\mu k}, S_2(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\zeta - \bar{z} - 2\pi\mu k},$$

соответственно к

$$\frac{1}{2\mu} \operatorname{ctg} \frac{\zeta - z}{2\mu}, \frac{1}{2\mu} \operatorname{ctg} \frac{\zeta - \bar{z}}{2\mu}$$

(здесь $z \in \partial\Delta_{0\eta}^2$ фиксировано) и ограниченности f_2 на множестве $\partial\Delta_{0\eta}^2$, получим равенство

$$f_2(z) = \frac{1}{4\pi\mu i} \int_{\partial\Delta_{0\eta}^2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\zeta - z}{2\mu} - \operatorname{ctg} \frac{\zeta - \bar{z}}{2\mu} \right) f_2(\zeta) d\zeta = \int_{\partial\Delta_{0\eta}^2} \Phi_2 d\zeta.$$

По свойству аддитивности

$$f_2(z) = \int_{\partial\Delta_{0\eta}^2} \Phi_2 d\zeta = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi\mu} \Phi_2 d\zeta, I_2 = \int_{2\pi\mu}^{2\pi\mu+i\eta} \Phi_2 d\zeta, I_3 = \int_{2\pi\mu+i\eta}^{i\eta} \Phi_2 d\zeta, I_4 = \int_{i\eta}^0 \Phi_2 d\zeta.$$

Интеграл I_1 по сегменту $[0, 2\pi\mu]$ есть

$$I_1 = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{2\pi\mu} \operatorname{Im} \operatorname{ctg} \frac{x - z}{2\mu} f_2(x) dx.$$

В интеграле I_2 , сделав замену $\zeta = u + 2\pi\mu$, получим

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{4\pi\mu i} \int_0^{i\eta} \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{u - z}{2\mu} + \pi \right) - \operatorname{ctg} \left(\frac{u - \bar{z}}{2\mu} + \pi \right) \right) f_2(u + 2\pi\mu) du = \\ &= \frac{1}{4\pi\mu i} \int_0^{i\eta} \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{u - z}{2\mu} + \pi \right) - \operatorname{ctg} \left(\frac{u - \bar{z}}{2\mu} + \pi \right) \right) (f_2(u) + 2\pi) du = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi\mu i} \int_0^{i\eta} \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{u-z}{2\mu} \right) - \operatorname{ctg} \left(\frac{u-\bar{z}}{2\mu} \right) \right) f_2(u) du + \\
&\quad + \frac{1}{2\mu i} \int_0^{i\eta} \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{u-z}{2\mu} \right) - \operatorname{ctg} \left(\frac{u-\bar{z}}{2\mu} \right) \right) du.
\end{aligned}$$

К интегралу I_2 прибавим

$$I_4 = -\frac{1}{4\pi\mu i} \int_0^{i\eta} \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{u-z}{2\mu} \right) - \operatorname{ctg} \left(\frac{u-\bar{z}}{2\mu} \right) \right) f_2(u) du.$$

В результате получим

$$I_2 + I_4 = \frac{1}{2\mu i} \int_0^{i\eta} \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{u-z}{2\mu} \right) - \operatorname{ctg} \left(\frac{u-\bar{z}}{2\mu} \right) \right) du.$$

Выполнив замену переменного $u = it$, получим

$$\begin{aligned}
I_2 + I_4 &= \frac{1}{2\mu i} \int_0^{\eta} \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{it-z}{2\mu} \right) - \operatorname{ctg} \left(\frac{it-\bar{z}}{2\mu} \right) \right) dt = \\
&= \frac{1}{i} \left[\ln \frac{\sin \frac{i\eta-z}{2\mu}}{\sin \frac{i\eta-\bar{z}}{2\mu}} - \ln \frac{\sin \frac{z}{2\mu}}{\sin \frac{\bar{z}}{2\mu}} \right].
\end{aligned}$$

Преобразовав интеграл I_3 , получим

$$\begin{aligned}
I_3 &= -\frac{1}{4\pi\mu^2 i} \int_0^{2\pi\mu} \left(\operatorname{ctg} \frac{x+i\eta-z}{2\mu} - \operatorname{ctg} \frac{x+i\eta-\bar{z}}{2\mu} \right) x dx - \\
&\quad - \frac{\eta}{4\pi\mu^2} \int_0^{2\pi\mu} \left(\operatorname{ctg} \frac{x+i\eta-z}{2\mu} - \operatorname{ctg} \frac{x+i\eta-\bar{z}}{2\mu} \right) dx - \\
&\quad - \frac{1}{4\pi\mu i} \int_0^{2\pi\mu} \left(\operatorname{ctg} \frac{x+i\eta-z}{2\mu} - \operatorname{ctg} \frac{x+i\eta-\bar{z}}{2\mu} \right) \left(f_2(x+i\eta) - \frac{x+i\eta}{\mu} \right) dx.
\end{aligned}$$

Вычислим последнее слагаемое в этой сумме.

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi\mu} \left(\operatorname{ctg} \frac{x+i\eta-z}{2\mu} - \operatorname{ctg} \frac{x+i\eta-\bar{z}}{2\mu} \right) dx = \\
&= 2\mu \left[\ln \frac{\sin \left(\pi + \frac{i\eta-z}{2\mu} \right)}{\sin \frac{i\eta-z}{2\mu}} - \ln \frac{\sin \left(\pi + \frac{i\eta-\bar{z}}{2\mu} \right)}{\sin \frac{i\eta-\bar{z}}{2\mu}} \right] = 0
\end{aligned}$$

Следовательно, отображение f_2 при любом $\eta > 0$ представимо в

виде суммы

$$\begin{aligned}
 f_2(z) &= \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{2\pi\mu} \operatorname{Im} \operatorname{ctg} \frac{x-z}{2\mu} f_2(x) dx + \frac{1}{i} \left[\ln \frac{\sin \frac{i\eta-z}{2\mu}}{\sin \frac{i\eta-\bar{z}}{2\mu}} - \ln \frac{\sin \frac{z}{2\mu}}{\sin \frac{\bar{z}}{2\mu}} \right] - \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi\mu^2 i} \int_0^{2\pi\mu} \left(\operatorname{ctg} \frac{x+i\eta-z}{2\mu} - \operatorname{ctg} \frac{x+i\eta-\bar{z}}{2\mu} \right) x dx - \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi\mu i} \int_0^{2\pi\mu} \left(\operatorname{ctg} \frac{x+i\eta-z}{2\mu} - \operatorname{ctg} \frac{x+i\eta-\bar{z}}{2\mu} \right) \left(f_2(x+i\eta) - \frac{x+i\eta}{\mu} \right) dx.
 \end{aligned}$$

В полученном равенстве перейдем к пределу при $\eta \rightarrow +\infty$. Последние два слагаемых в правой части этого равенства стремятся к 0 в силу того, что

$$\begin{aligned}
 \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{x+i\eta-z}{2\mu} - \operatorname{ctg} \frac{x+i\eta-\bar{z}}{2\mu} \right) &= 0, \\
 \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left(f_2(x+i\eta) - \frac{x+i\eta}{\mu} \right) &= A.
 \end{aligned}$$

Рассмотренные пределы равномерны относительно x на сегменте $[0, 2\pi\mu]$ и, следовательно, предельные переходы закономерны.

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \ln \frac{\sin \frac{i\eta-z}{2\mu}}{\sin \frac{i\eta-\bar{z}}{2\mu}} = -\frac{1}{\mu} \operatorname{Im} z,$$

значит

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{\sin \frac{i\eta-z}{2\mu}}{\sin \frac{i\eta-\bar{z}}{2\mu}} - \ln \frac{\sin \frac{z}{2\mu}}{\sin \frac{\bar{z}}{2\mu}} \right] = -\frac{1}{\mu} \operatorname{Im} z - \ln \frac{\sin \frac{z}{2\mu}}{\sin \frac{\bar{z}}{2\mu}}.$$

Итак, отображение f_2 запишем в виде

$$f_2(z) = \int_0^{2\pi\mu} f_2(x) \operatorname{Im} \operatorname{ctg} \frac{x-z}{2\mu} dx + i \left[\frac{1}{\mu} \operatorname{Im} z + \ln \frac{\sin \frac{z}{2\mu}}{\sin \frac{\bar{z}}{2\mu}} \right].$$

В полученном равенстве отделим мнимую часть и получим следующую формулу

$$\operatorname{Im} f_2(z) = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{2\pi\mu} \operatorname{Im} \operatorname{ctg} \frac{x-z}{2\mu} \operatorname{Im} f_2(x) dx + \frac{1}{\mu} \operatorname{Im} z.$$

Аналогично доказывается для функции f_1 .

Для мнимой части рассматриваемых отображений справедлива следующая так называемая теорема о среднем.

Теорема 2. *Для голоморфного в верхней полуплоскости отображения f_1 с симметрией переноса вдоль вещественной оси, непрерывно продолжаемого на вещественную ось и удовлетворяющего*

условиям:

$$f_1(z + 2\pi k) = f_1(z) + 2\pi\lambda k, k \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$\lim_{\text{Im}z \Rightarrow +\infty} (f_1(z) - \lambda z) = A, A \in \mathbb{C}, \text{Im}z > 0,$$

справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Im}f_1(x)dx = \lambda \text{Im}A.$$

А для голоморфного в верхней полуплоскости отображения f_2 с симметрией переноса вдоль вещественной оси, непрерывно продолжаемого на вещественную ось и удовлетворяющего условиям :

$$f_2(z + 2\pi\mu k) = f_2(z) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$\lim_{\text{Im}z \Rightarrow +\infty} (f_2(z) - \frac{1}{\mu}z) = A, A \in \mathbb{C}, \text{Im}z > 0,$$

справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{2\pi\mu} \text{Im}f_2(x)dx = \frac{1}{\mu} \text{Im}A.$$

Доказательство.

$$\lim_{\text{Im}z \Rightarrow +\infty} \text{Im} \left(f_2(z) - \frac{1}{\mu}z \right) = \frac{1}{2\pi\mu} \lim_{\text{Im}z \Rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi\mu} \text{ctg} \frac{x-z}{2\mu} \text{Im}f_2(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{2\pi\mu} \text{Im}f_2(x)dx,$$

так как $\lim_{\text{Im}z \Rightarrow +\infty} \text{ctg} z = -i$.

Аналогично доказывается для функции f_1 . Из формулы типа формулы Пуассона и предыдущей теоремы получим формулу, которую будем называть формулой типа формулы Шварца.

Теорема 3. Для голоморфного в верхней полуплоскости отображения f_1 с симметрией переноса вдоль вещественной оси, непрерывно продолжаемого на вещественную ось и удовлетворяющего условиям :

$$f_1(z + 2\pi k) = f_1(z) + 2\pi\lambda k, k \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$\lim_{\text{Im}z \Rightarrow +\infty} (f_1(z) - \lambda z) = A, A \in \mathbb{C}, \text{Im}z > 0,$$

справедлива формула

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{ctg} \frac{x-z}{2} \text{Im}f_1(x)dx + \lambda z + \text{Re}A.$$

А для голоморфного в верхней полуплоскости отображения f_2 с

симметрией переноса вдоль вещественной оси, непрерывно продолжаемого на вещественную ось и удовлетворяющего условиям :

$$f_2(z + 2\pi\mu k) = f_2(z) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$\lim_{Imz \Rightarrow +\infty} (f_2(z) - \frac{1}{\mu}z) = A, A \in \mathbb{C}, Imz > 0,$$

справедлива формула

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{2\pi\mu} \operatorname{ctg} \frac{x-z}{2\mu} \operatorname{Im} f_2(x) dx + \frac{1}{\mu}z + \operatorname{Re} A.$$

Доказательство. Отображение

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{2\pi\mu} \operatorname{ctg} \frac{x-z}{2\mu} \operatorname{Im} f_2(x) dx + \frac{1}{\mu}z + \delta,$$

где $\delta \in \mathbb{R}$, голоморфно в верхней полуплоскости и

$$\operatorname{Im} f_2(z) = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{2\pi\mu} \operatorname{Im} \operatorname{ctg} \frac{x-z}{2\mu} \operatorname{Im} f_2(x) dx + \frac{1}{\mu} \operatorname{Im} z.$$

Так как

$$\begin{aligned} A &= \lim_{Imz \Rightarrow +\infty} \left(f_2(z) - \frac{1}{\mu}z \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\mu} \lim_{Imz \Rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi\mu} \operatorname{ctg} \frac{x-z}{2\mu} \operatorname{Im} f_2(x) dx + \delta = \\ &= \frac{i}{2\pi\mu} \int_0^{2\pi\mu} \operatorname{Im} f_2(x) dx + \delta = i \operatorname{Im} A + \delta, \end{aligned}$$

то имеем $\delta = \operatorname{Re} A$.

Аналогично доказывается для функции f_1 .

Литература

1. Копанева Л.С. Геометрические и экстремальные задачи для отображений с симметрией переноса: дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук / Л.С. Копанева. – Томск: Томский государственный университет, 2003. – 85 с.

2. Александров И.А. Теория функций комплексного переменного: Учебник. / И.А. Александров. – Томск: Томский государственный университет, 2002. – 510 с.

Свободная конвекция степенной жидкости в замкнутой полости с локальным источником энергии *

Бондаренко Д. С., Шеремет М. А.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: whiteink@bk.ru

Аннотация

В данной работе представлен анализ режимов естественной конвекции степенной неньютоновской жидкости в замкнутой квадратной полости при наличии локального изотермического источника энергии. Математическая модель, сформулированная в безразмерных переменных «функция тока – завихренность – температура», реализована численно методом конечных разностей на равномерной сетке. Исследования проведены в широком диапазоне изменения числа Рэлея и показателя степенной жидкости. Получены поля изолиний функции тока и температуры, отражающие влияние ключевых характеристик на структуру течения и теплоперенос.

Ключевые слова: свободная конвекция, степенная жидкость, локальный источник энергии.

1. Введение

Естественная конвекция в жидкостях играет значительную роль в природных явлениях, в развитии техники и естествознания. Исследования в данной области стимулируются необходимостью развития производства и потребностью в рациональном использовании энергии. В течение многих лет сфера интенсивного изучения и применения явлений теплообмена непрерывно развивалась. На данный момент она включает в себя различные направления как техники (химическая технология, нефтегазодобыча, машиностроение), так и естественных наук (биология, геология, физика атмосферы и океана и др.) [1].

Естественная конвекция ньютоновских и неньютоновских жидкостей в прямоугольных полостях используется в различных технических приложениях, таких как бурение нефтяных скважин, производство целлюлозной бумаги, пищевая промышленность и полимерная инженерия. Псевдопластические жидкости используются в

* Работа выполнена в рамках проекта Российского научного фонда (соглашение № 17-79-20141).

компактных теплообменниках или электронных модулях в качестве охлаждающей среды [1, 2].

Целью данного исследования является математическое моделирование свободно-конвективного теплопереноса в замкнутой полости, заполненной неньютоновской степенной жидкостью, при наличии локального изотермического источника энергии.

2. Математическая модель и метод решения

В настоящей работе моделируются режимы свободной конвекции степенной жидкости в замкнутой квадратной полости при наличии нагреваемого элемента постоянной температуры T_h , расположенного в центральной части нижней стенки полости. Область решения содержит две вертикальные изотермические границы с температурой охлаждения T_c ($T_h > T_c$). Горизонтальные стенки полости считаются теплоизолированными. При проведении вычислительных экспериментов считается, что внутри рабочей среды теплоперенос осуществляется за счет конвекции; среда является неньютоновской теплопроводной жидкостью, удовлетворяющей приближению Буссинеска.

Следует отметить, что для описания неньютоновского характера течения применяется степенной закон Оствальда-де-Вилла [1, 2]:

$$\tau_{ij} = 2\mu_{eff} D_{ij} = 2K(2D_{kl}D_{kl})^{\frac{n-1}{2}} D_{ij}.$$

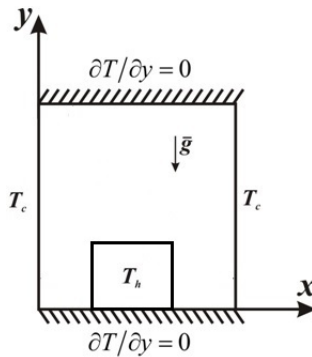


Рис. 1. Область решения задачи

Для описания течения и теплопереноса внутри полости используются нестационарные дифференциальные уравнения в безразмерных преобразованных переменных «функция тока – завихренность – температура»:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \left(\frac{Ra}{Pr} \right)^{\frac{n-2}{2}} [\nabla^2(\bar{\mu}\Omega) + S_\Omega] + \frac{\partial \Theta}{\partial X} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) \quad (3)$$

здесь

$$\bar{\mu} = [4\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}\right)^2]^{\frac{n-1}{2}},$$

$$S_\omega = 2\left[\frac{\partial^2 \bar{\mu}}{\partial X^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\mu}}{\partial Y^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} - 2\frac{\partial^2 \bar{\mu}}{\partial X \partial Y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y}\right].$$

Граничные условия для поставленной задачи (1)-(3) в безразмерном виде выглядят следующим образом:

$$X = 0, 0 \leq Y \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \Theta = 0;$$

$$Y = 0, 0 \leq X \leq 0.4, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0;$$

$$X = 0.4, 0 \leq Y \leq 0.2, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \Theta = 1;$$

$$Y = 0.2, 0.4 \leq X \leq 0.6, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \Theta = 0;$$

$$X = 0.6, 0 \leq Y \leq 0.2, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \Theta = 1;$$

$$Y = 0, 0.6 \leq X \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0;$$

$$X = 1, 0 \leq Y \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \Theta = 0;$$

$$Y = 1, 0 \leq X \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0;$$

Сформулированная краевая задача для дифференциальных уравнений в частных производных (1)–(3) с соответствующими начальными и граничными условиями решена методом конечных разностей [3] на равномерной сетке. Значения завихренности скорости на поверхностях стенок полости и локального источника энергии определялись на основе формулы Пирсона [3]. Для численного решения уравнений параболического типа (2) и (3) применялась локально-одномерная схема Самарского, позволяющая плоскую задачу свести к системе одномерных. Для аппроксимации конвективных сла-

гаемых использовалась вторая схема против потока, для диффузионных слагаемых – центральные разности. Эволюционный член представлял собой одностороннюю разность по времени и имел первый порядок точности относительно шага по времени. Все производные по пространственным координатам аппроксимировались со вторым порядком точности относительно шага по координате. Дискретизация уравнения Пуассона (1) проводилась на основе формул симметричной аппроксимации вторых производных. При этом полученное разностное уравнение разрешалось методом последовательной верхней релаксации. Оптимальное значение параметра релаксации подбиралось на основе вычислительных экспериментов.

Разработанный программный код был протестирован на множестве модельных задач, а также проанализирован на сеточную сходимость.

На рис 2. Представлены временные зависимости среднего числа Нуссельта на поверхности нагревателя от размерности разностной сетки при $Ra = 10^5$, $Pr = 10^2$, $n = 0.9$.

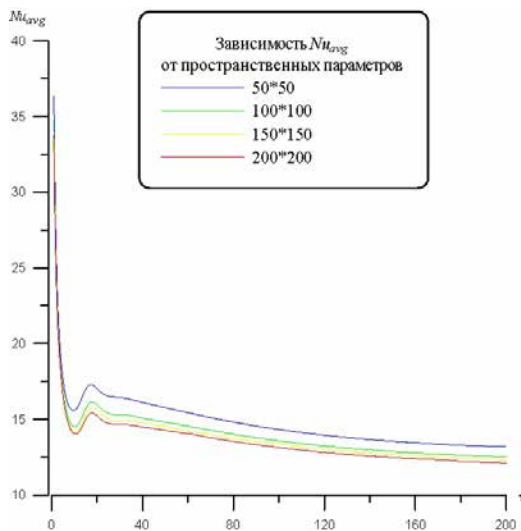


Рис. 2. Значение среднего числа Нуссельта в зависимости от времени и параметров разностной сетки

Из этого рисунка видно, что с течением времени наблюдается тепловое установление процесса. Поскольку уменьшение шага разностной сетки отражается на повышении времени счета, то для

дальнейшего анализа была выбрана разностная сетка размерности $100 * 100$ узлов.

3. Результаты численного моделирования

Численный анализ был проведен при следующих значениях безразмерных комплексов: $Ra = 10^4 - 10^6$; $n = 0.8 - 1.2$; $0 \leq \tau \leq 100$.

На рис. 3 представлены распределения изолиний функции тока и температуры, отражающие влияние числа Рэлея на структуру течения и теплоперенос при $Pr = 10^2$, $n = 0.8$.

Независимо от значения числа Рэлея внутри полости формируются две рециркуляционные зоны, иллюстрирующие формирование восходящего потока в центральной части полости над источником энергии и двух нисходящих течений вблизи охлаждаемых вертикальных изотермических стенок. Следует отметить, что при $Ra = 10^4$ интенсивность течения достаточно низкая, что обусловлено доминированием кондуктивного механизма переноса энергии (изотермы внутри полости распределяются параллельно изотермическим вертикальным стенкам). Рост числа Рэлея проявляется в интенсификации конвективного течения и теплообмена. Над источником энергии развивается двумерный тепловой факел, отражающий формирование зон температурной стратификации слева и справа от источника энергии. Ядра конвективных ячеек с ростом числа Рэлея смещаются в горизонтальном направлении, приближаясь к оси симметрии задачи.

На рисунках 4 и 5 представлены распределения линий тока и изотерм при $Ra = 10^5$, $Pr = 10^2$ и различных показателях степенной жидкости. Следует отметить, что параметр n отражает характер связи между компонентами тензора скоростей деформации и тензора напряжений.

Анализируя рисунки 4 и 5 можно отметить, что увеличение показателя степени n приводит к ослаблению конвективного течения: $|\Psi|_{max}^{n=0.8} = 0.006$, $|\Psi|_{max}^{n=0.9} = 0.0055$, $|\Psi|_{max}^{n=1.0} = 0.0045$, $|\Psi|_{max}^{n=1.1} = 0.0045$, $|\Psi|_{max}^{n=1.2} = 0.004$. Основная структура течения не терпит особых изменений: конвективные ячейки также расположены симметрично друг другу, в центре области также присутствует восходящий поток от источника энергии, а вблизи охлаждающих вертикальных стенок - два нисходящих потока. Однако с ростом показателя поведения жидкости пространственная ориентация конвективных ячеек не изменяется и не происходит смещения в горизонтальном направлении. Следует также отметить, что с ростом показателя степени n возрастает вязкость неньютоновской среды внутри полости, вслед-

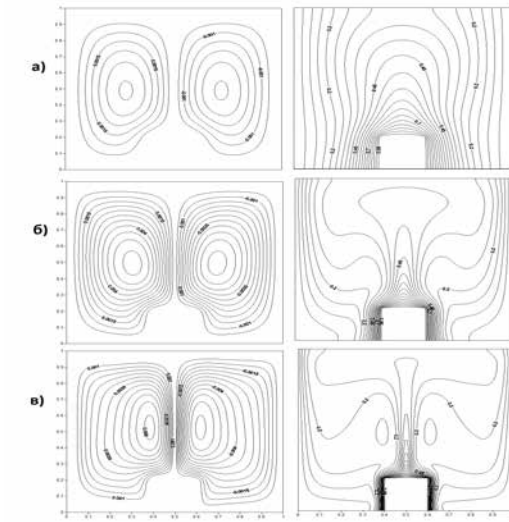


Рис. 3. Изолинии функции тока и температуры при $Pr = 10^2, n = 0.8$: а) $Ra = 10^4$, б) $Ra = 10^5$, в) $Ra = 10^6$

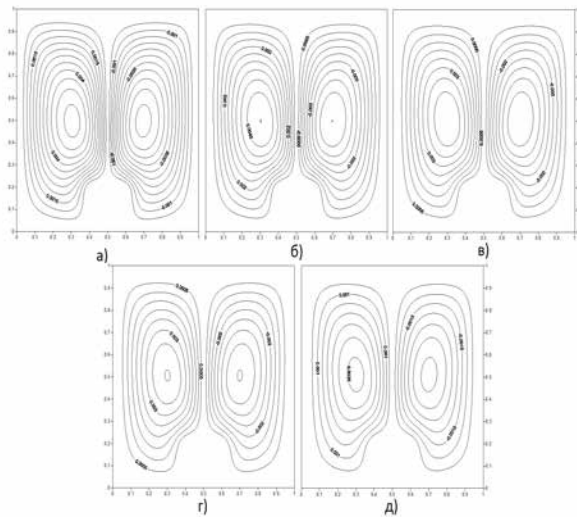


Рис. 4. Изолинии функции тока при $Pr = 10^2, Ra = 10^5$ для разных показателей степени n : а) $n = 0.8$, б) $n = 0.9$, в) $n = 1.0$, г) $n = 1.1$, д) $n = 1.2$

ствии чего можно наблюдать уменьшение скорости конвективного течения. При этом распределение температуры также изменяется, заметен более интенсивный прогрев полости.

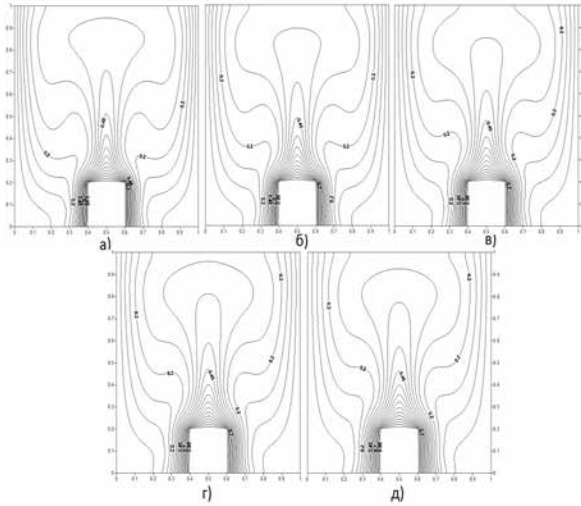


Рис. 5. Изолинии температуры при $Pr = 10^2$, $Ra = 10^5$ для разных показателей степени n : а) $n = 0.8$, б) $n = 0.9$, в) $n = 1.0$, г) $n = 1.1$, д) $n = 1.2$

4. Заключение

Проведено математическое моделирование свободной конвекции степенной неньютоновской жидкости в квадратной замкнутой полости с локальным изотермическим источником энергии. Исследования реализованы в широком диапазоне изменения определяющих параметров: $Ra = 10^4 - 10^6$; $n = 0.8 - 1.2$. Установлено, что с увеличением числа Рэлея происходит интенсификация теплопереноса со смещением ядер конвективных ячеек в горизонтальном направлении. Рост показателя поведения жидкости приводит к ослаблению свободно-конвективного теплопереноса вследствие роста вязкости неньютоновской среды и повышения температуры внутри полости.

Литература

1. Khezzar L. Natural convection of power law fluids in inclined cavities / L. Khezzar, D. Siginer, I. Vinogarov // International Journal of Thermal Sciences. – 2012. – Vol. 53. Pp. 8–17.

2. Sojoudi A. Steady natural convection of non-Newtonian power law fluid in a trapezoidal enclosure/ Sojoudi A., Saha S.C., Gu Y.T., Hossian M.A. // *Advances in Mechanical Engineering*. – 2003. – Vol. 5. Article ID 653 108. P. 8.

3. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.

О переходе от задачи взаимодействия молекул природного газа с отдельной нанотрубкой к взаимодействию с ячейкой из четырех нанотрубок

Борсук А. С., Тарасов Е. А.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: diomedis@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена обобщению результатов исследования сорбционной способности отдельной открытой однослойной углеродной нанотрубки и переходу к исследованию возможности создания элементарной ячейки фильтрующего наноматериала составленного четырьмя открытыми однослойными углеродными нанотрубками. Результаты моделирования позволяют говорить о том, что в рамках дискретного подхода описания взаимодействия элементарная ячейка мембраны на основе нанотрубок, в силу инвариантности формы барьера длине трубки, позволяет считать, что получив материал составленный из таких ячеек, можно будет успешно осуществлять газоразделение бинарных смесей.

Ключевые слова: наноматериалы, углеродные нанотрубки, разделение газов.

Актуальность исследований наноматериалов заключается в том, что в последние годы интерес к аллотропным модификациям углерода (sp^2 гибридизация) резко возрос, а так же возникли целые направления использования подобных структур. Одним из таких направлений является исследование возможности создания газоразделительного нанофильтрующего материала, в основе которого будут различные формы углерода.

В работах [1, 2] показано, что при описании взаимодействия наночастиц на основе углерода, таких аллотропных модификаций как углеродные нанотрубки, фуллерены и графен, с молекулами – компонентами природного газа, можно выделить два подхода в описании этого взаимодействия: континуальный и дискретный. В рамках решения задачи о движении молекулы в поле потенциала открытой нанотрубки в работе [3] определено, что в нанотрубках небольшого

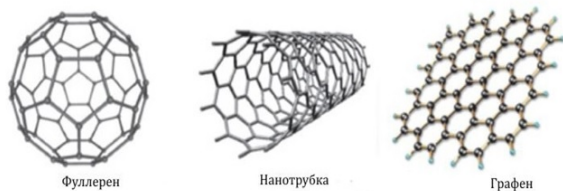


Рис. 1. Аллотропные модификации углерода

радиуса сорбционная зона во внутренней области обладает большим потенциалом сорбции, чем зона вне трубки. В данной работе мы приводим результаты моделирования взаимодействия такой трубки с молекулами метана имеющими разные скорости движения.

Взаимодействие с одной нанотрубкой.

Математическая модель взаимодействия базируется на понятии потенциала Леннарда-Джонса. Его классический вид приведен ниже.

$$U(r) = 4 * \varepsilon [(\sigma/r)^{12} - (\sigma/r)^6]$$

Дискретный подход заключается в описании взаимодействия молекулы или атома с каждым атомом структуры. Потенциал от дискретной совокупности атомов углерода, составляющих нанотрубку, определяется простым суммированием потенциалов парных взаимодействий [4].

Численная модель взаимодействия, включает в себя взаимодействие молекулы метана с дискретной структурой открытой углеродной нанотрубки, которая состоит из 144 атомов углерода, расположенных в соответствии с классическим представлением о кристаллической структуре аллотропных модификаций углерода – гексагональная сеть.

Молекула метана движется по оси X, при приближении к нанотрубке испытывая на себе воздействие от её поля потенциала, а затем, в зависимости от скорости, либо проходит нанотрубку и удаляется от области взаимодействия с её полем потенциала либо начинает сорбционные движения внутри и около нанотрубки. В результате решения по численной модели для данного случая дискретного описания открытой углеродной нанотрубки получены следующие результаты, представленные на рисунке 3.

Как можно видеть на рисунке 3, молекулы метана, имеющие

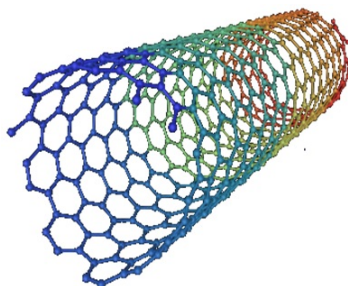


Рис. 2. Открытая однослойная углеродная нанотрубка

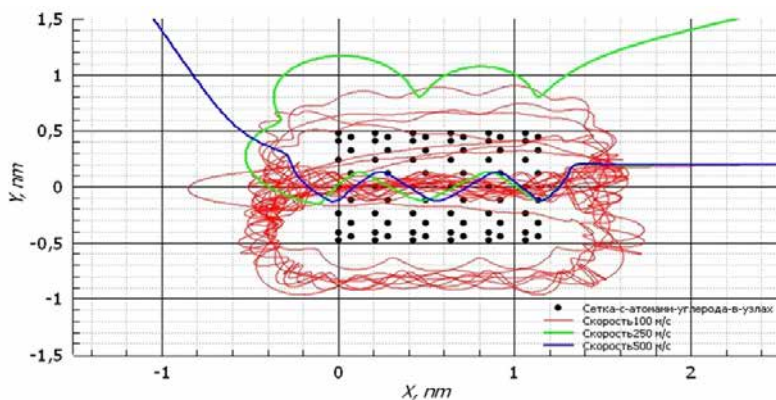


Рис. 3. Результаты численного моделирования взаимодействия молекулы метана с различными скоростями с открытой углеродной нанотрубкой

высокую скорость (500 м/с) пролетают трубку и уходят за пределы области рассмотрения, молекулы со скоростью, равной 250 м/с испытывают более долгое воздействие поля потенциала трубки и сильно изменяют свою траекторию, но тоже покидают рассматриваемую область. Но низкоэнергетические молекулы метана (скорость равна 100 м/с) оказываются вовлечены в орбитальное движение вокруг нанотрубки.

Моделирование элементарной ячейки.

Для моделирования была выбрана элементарная ячейка наномембраны – 4 открытые углеродные нанотрубки, отстоящие друг от друга на равное расстояние.

При этом длина нанотрубок составляет 1,136 нм. Минимальное расстояние между объектами данной однопараметрической систе-

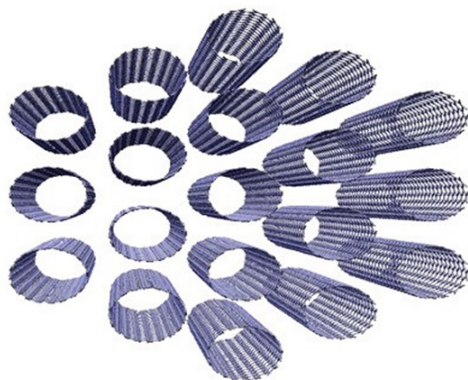


Рис. 4. Гипотетическое представление материала, составленного открытыми углеродными нанотрубками

мы $h=0,35$ нм. В [5] было показано, что форма барьера для открытой нанотрубки инвариантна её длине. В основе модели лежит модифицированный LJ-потенциал. Его модификация была необходима для того, чтобы интегрировать распределение силовых центров-источников поля по объему тела различной формы. Подробнее обоснование модификации приведено в [5]. Результаты численного моделирования процесса взаимодействия атома гелия с структурой представлены на рисунках 5 и 6.

В ходе моделирования получено, что траектории близкие к оси элементарной ячейки являются проникаемыми для каждой компоненты бинарной смеси гелий-метан, при скоростях молекулы/атома сравнимых с наиболее вероятными скоростями данных газов, взятых из распределения Максвелла.

Выводы.

Результаты моделирования показали следующее: выбрав наиболее вероятные скорости молекулы/атома данных газов, взятых из распределения Максвелла (при нормальных условиях для гелия эта скорость составляет 1300 м/с, а для метана – 750 м/с) можно говорить, что траектории около осевой являются проникаемыми, однако при смещении от оси система нанотрубок будет способна не пропускать более тяжелые молекулы метана, пропуская при этом атомы гелия, тем самым выполняя функцию фильтра. В рамках дискретного подхода описания взаимодействия элементарная ячейка мембраны на основе нанотрубок, в силу инвариантности формы барьера длине трубки, позволяет считать, что получив материал

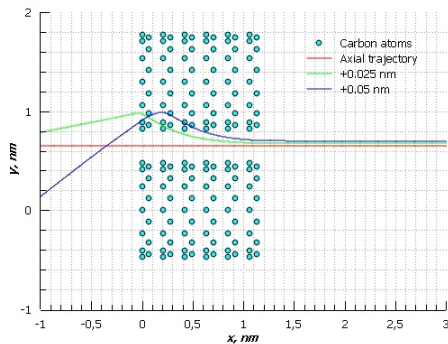


Рис. 5. Результаты численного моделирования взаимодействия геля с ячейкой состоящей из 4 открытых одностенных углеродных нанотрубок

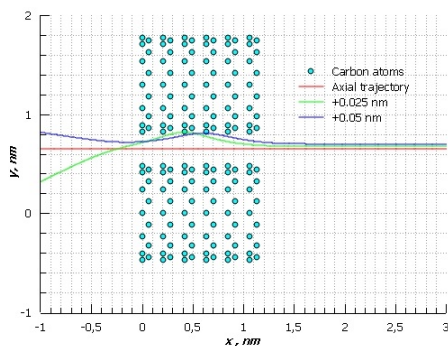


Рис. 6. Результаты численного моделирования взаимодействия метана с ячейкой состоящей из 4 открытых одностенных углеродных нанотрубок

составленный из таких ячеек, можно будет успешно осуществлять газоразделение бинарных смесей.

Литература

1. Жаровцев В.В., Маслов А.С., Овчаренко В.В., Тарасов Е.А., Ямкин А.В. Проницаемость системы из двух наночастиц // Известия высших учебных заведений. Физика. 2014. Т. 57. № 8-2. С. 138–141.

2. M.A. Bubenchikov, A.I. Potekaev, A.M. Bubenchikov, O.V. Usenko, A.V. Malozemov, E.A. Tarasov The interaction potential of an open nanotube and its permeability: Molecular dynamics simulation

// EPJ Web of Conferences, Volume 110, 23 February 2016, Article number 01061.

3. E.A. Tarasov Interaction Potential of Open Carbon Nanotube with Natural Gas Molecular Components // Key Engineering Materials, Volume 685, 2016, P. 534–538.

4. B. M. Axilord E. Teller "Interaction of the van der Waals' type between three atoms." J. Chem. Phys. 11, 299–300 (1943)

5. E.A. Тарасов Взаимодействие нанообъектов на основе углерода с компонентами природного газа: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Томск, 2017. 24 с.

Выбор коротационной производной при моделировании ударного нагружения изотропного и анизотропного твёрдого тела на примере алюминиевого сплава Д16 *

Стребкова Е. А., Кривошеина М. Н.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: kateks93@mail.ru

Аннотация

Рассмотрены коротационные производные Яуманна и Грина-Нахди для моделирования процесса деформации ударного нагружения для случая изотропного и анизотропного материала. Учёт анизотропии механических свойств влияет на величины остаточных напряжений после применения коротационных производных Яуманна и Грина-Нахди при возвращении материала в ненапряженное состояние. Это показано на примере алюминиевого сплава Д16. Для повышения точности расчётов компонент тензора напряжений предложено применение комбинации этих производных.

Ключевые слова: коротационные производные, анизотропия материалов.

Введение Непосредственное использование в уравнениях компонент тензора напряжений приводит к неверным результатам, обусловленным поворотом элементов как жёсткого целого [1, 2]. Способом избавления от этого дефекта является применение коротационных производных.

В механике сплошных сред коротационные производные определяют скорости изменения тензоров по отношению к некоторому подвижному базису т.е. относительные скорости. Выбирая различные подвижные базисы получают различные коротационные производные.

При формальном математическом рассмотрении напряжений использование той или иной производной не имеет никаких преимуществ. Однако при численном решении задач желательно использовать ту производную, которая приводит к более точному решению.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ No 18-31-00278 .

В работе исследуются величины остаточных напряжений, возникающих после первого и последующих циклов нагружений поликристаллов из-за погрешностей, вносимых коротационными производными Яуманна и Грина-Нахди [1]. Это важно для моделирования многократным циклическим нагружением элементов конструкций. Остаточные напряжения после каждого цикла нагружений могут оказывать различное негативное влияние на итоговую картину напряженного состояния при описании упругопластических деформаций в твердых телах. Исследования проводятся на основе рассмотрения только циклической упругой деформации, позволяющей возвращаться к ненапряжённому состоянию.

Рассмотрено циклическое напряжение в поликристаллическом Д16 при моделировании изотропного или анизотропного давления в материале.

1. Основные соотношения В работе рассмотрены две производные: повсеместно используемая коротационная производная Яуманна [2–4] и более редко встречающаяся в литературе производная Грина-Нахди [5]

$$\sigma^J = \dot{\sigma} - \omega \cdot \sigma + \sigma \cdot \omega \left(\omega = \frac{1}{2} \text{rot} \bar{v} \right) \quad (1)$$

$$\sigma^G = \dot{\sigma} - \Omega \cdot \sigma + \sigma \cdot \Omega \left(\Omega = \dot{R} \cdot R^T \right) \quad (2)$$

Напряжения рассматриваются как напряжения Кирхгофа – τ , связанные с тензором Коши или истинным напряжением σ следующим соотношением

$$\tau = (\det F) \sigma \quad (3)$$

где F – тензор градиента деформации

$$F = \frac{\partial x}{\partial X}, \det F > 0 \quad (4)$$

X – положение материальной частицы в контрольной конфигурации, а x – положение в текущей конфигурации.

Для изотропного случая тензор полных напряжений записывается единственным образом $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + S_{ij}$, где δ_{ij} – символы Кронекера, а представление производных (1) и (2) может быть записано только для компонент девиатора напряжений [3]

$$\frac{DS_{ij}}{Dt} = \frac{dS_{ij}}{dt} - \omega_{ik}\sigma_{kj} + \sigma_{ik}\omega_{kj} \quad (5)$$

$$\frac{DS_{ij}}{Dt} = \frac{dS_{ij}}{dt} - \Omega_{ik}\sigma_{kj} + \sigma_{ik}\Omega_{kj} \quad (6)$$

В случае анизотропии упругих и пластических свойств твёрдого тела тензор напряжений записывается иначе $\sigma_{ij} = -P\lambda_{ij} + S_{ij}$, где λ_{ij} – коэффициенты, зависящие от упругих свойств материала [6]. В этом случае (1) и (2) примут следующий вид

$$\frac{D\sigma_{ij}}{Dt} = \frac{dS_{ij}}{dt} - \lambda_{ij} \frac{dP}{dt} - \omega_{ik}\sigma_{kj} + \sigma_{ik}\omega_{kj} + P\omega_{ij}(\lambda_{jj} - \lambda_{ii}) \quad (7)$$

$$\frac{DS_{ij}}{Dt} = \frac{dS_{ij}}{dt} - \lambda_{ij} \frac{dP}{dt} - \Omega_{ik}\sigma_{kj} + \sigma_{ik}\Omega_{kj} + P\Omega_{ij}(\lambda_{jj} - \lambda_{ii}) \quad (8)$$

Сравнивая (5) с (7) и (6) с (8) можно увидеть некоторые отличия.

Например, для монокристалла цинка, с учётом его анизотропии, эти слагаемые могут составлять порядка 25–80% от слагаемых, связанных с изотропными свойствами [7]. Для поликристаллов эти оценки будут несколько меньше из-за более слабо выраженных анизотропных свойств.

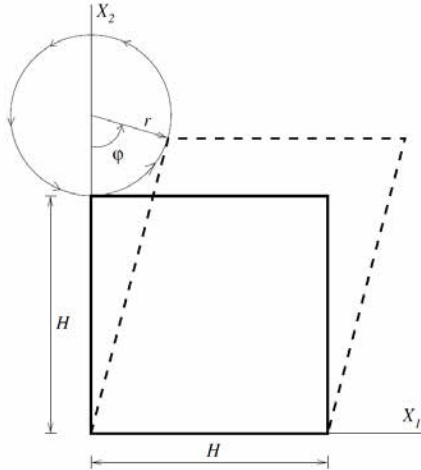


Рис. 1. Циклическое нагружение

2. Циклическое нагружение Рассмотрим квадратный элемент размера $H \cdot H$ на рис. 3, который встроен в декартовую систему отсчета X_i . Мы накладываем циклическую деформацию, в которой оба верхних угла вращаются по кругу с радиусом $r_{\text{пред}}$. Величина

радиуса r для Д16 определяется таким образом, чтобы во время нагружения материал всегда остается в рамках упругих деформаций. Элемент представлен комбинацией растяжения/сжатия в направлении X_2 и сдвига в направлении X_1 и остается параллелограммом по форме. Деформация в направлении X_3 не накладывается. Деформирование элемента в реальной конфигурации, описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + \frac{\sin \varphi \frac{r}{H}}{1 + (1 - \cos \varphi) \frac{r}{H}} \\ x_2 &= \left(1 + (1 - \cos \varphi) \frac{r}{H}\right) X_2 \\ x_3 &= X_3 \end{aligned} \quad (9)$$

Применяя (4) к (9) и воспользовавшись соотношением (3) для напряжений, с учётом (1) и (2), можно получить дифференциальные уравнения для изменений каждой компоненты напряжений и, следовательно, выполнить численное интегрирование.

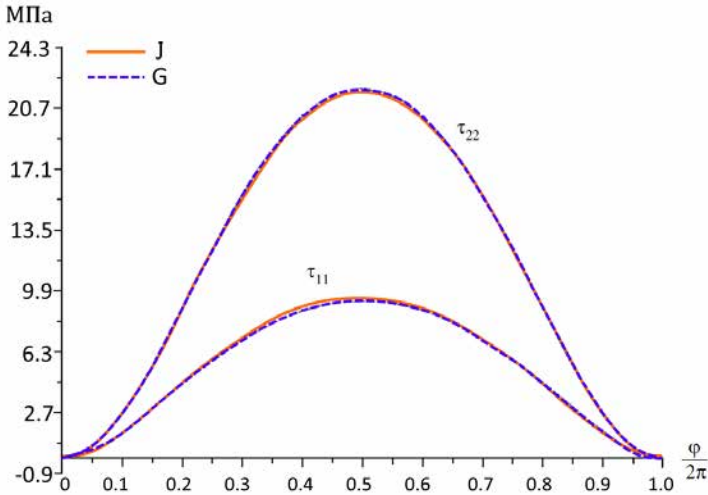


Рис. 2. Нормальные напряжения τ_{11} и τ_{22}

На рис. 2 строятся нормальные напряжения Кирхгофа τ_{11} и τ_{22} для коротационных производных Яуманна и Грина-Нахди. Видно, что между графиками существуют только незначительные различия. На графиках видно, что нормальные напряжения остаются

практически неизменными в конце цикла, поэтому ошибкой в них можно пренебречь.

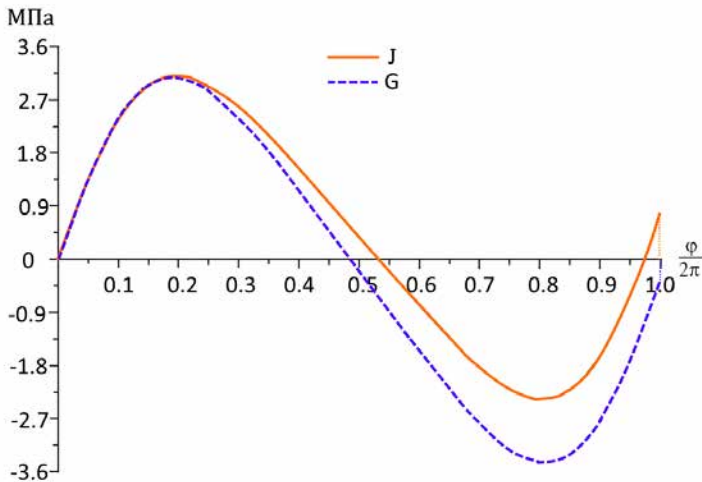


Рис. 3. Сдвиговое напряжение τ_{12}

Различия наблюдаются в графике сдвигового напряжения τ_{12} рис. 3, где присутствуют остаточные напряжения в конце одного цикла нагружений.

3. Оценки остаточных напряжений Далее выполним оценки остаточных напряжений после 3 циклов нагружения Д16 как изотропного материала с дальнейшим учётом анизотропии и оценки возникших отличий в формулах (5) – (8): $\Delta \hat{P}$ – вклад дополнительных членов для коротационных производных в случае учёта анизотропии материала.

Если мы будем осуществлять нагружение в направлении слабых упругих свойств, то остаточные напряжения, с учётом анизотропии, будут по модулю возрастать (таблица 1).

Если мы будем осуществлять нагружение в направлении сильных упругих свойств, то остаточные напряжения, с учётом анизотропии, будут по модулю уменьшаться (таблица 2).

Таблица 1. Оценки остаточных напряжений нагружения в направлении слабых упругих свойств сплава Д16: $\lambda_{11} = 0.9748, \lambda_{22} = 1.0126$

Производная	Изотропный случай	Анизотропный случай
Яуманна $\Delta_J \sigma_{12}$	2.025МПа	$(\Delta_J \sigma_{12})_{\text{изо}} + \Delta \hat{P}$
Грина-Нахди $\Delta_G \sigma_{12}$	-1.35МПа	$(\Delta_G \sigma_{12})_{\text{изо}} - \Delta \hat{P}$

Таблица 2. Оценки остаточных напряжений нагружения в направлении сильных упругих свойств сплава Д16: $\lambda_{11} = 1.0126, \lambda_{22} = 0.9748$

Производная	Изотропный случай	Анизотропный случай
Яуманна $\Delta_J \sigma_{12}$	2.025МПа	$(\Delta_J \sigma_{12})_{\text{изо}} - \Delta \hat{P}$
Грина-Нахди $\Delta_G \sigma_{12}$	-1.35МПа	$(\Delta_G \sigma_{12})_{\text{изо}} + \Delta \hat{P}$

Для алюминиевого сплава Д16 анизотропия настолько мала, что $\Delta \hat{P}$ по абсолютному значению по отношению к Δ_J и Δ_G не повлияет на смену знака.

Выводы 1. В зависимости от направления нагружения накопление ошибки, с учётом анизотропии, по модулю возрастает или убывает;

2. Т.к. величины накопленных ошибок получились в противофазе, то для повышения точности расчётов можно использовать линейную комбинацию двух коротационных производных.

Литература

1. Meyers A., Xiao H., Bruhns O. Elastic stress ratchetting and corotational stress rates // Tech. Mech. – 2003. – В. 23. – Н. 2–4. – Р. 92–102.

2. Трусов П.В., Кондратьев Н.С., Швейкин А.И О геометрически нелинейных определяющих соотношениях упругого материала // Вестн. Перм. политехн. ун-та. Механика. – 2015. – №3. – С. 182–200.

3. Уилкинс М.Л., Расчёт упругосластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967. – С. 212–263.

4. Белов Н.Н. Динамика высокоскоростного удара и сопутствующие физические явления. – Томск: STT, 2005. – 356 с.

5. Hashiguchi. K. Elastoplasticity Theoty. – Berlin. Springer, 2009. – 416 p.
6. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. – М.: Мир, 1979. – 304 с.
7. Mason W.P. Physical Acoustics Principles and Methods. V. II. Pt. B. Lattice Dynamics Academic Press. N.Y. – London, 1965.

Взаимодействие компонент природного газа с фуллереновыми частицами

Шестаков А. Е., Тарасов Е. А.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: diomedis@mail.ru

Аннотация

В работе проведен анализ проницаемости ячейки составленной из фуллереновых частиц относительно молекул метана, этана и атомов гелия. Показано, что для ячейки из 8 молекул фуллерена C₆₀ составленных в виде простой кубической решетки с параметром равным 0.4 нанометра, уже даже первый ряд фуллеренов создает барьер, не проницаемый для метана и этана, имеющих средние скорости движения при температуре 20 градусов Цельсия. Однако гелий (так же движущийся со скоростью характерной для 20 градусов Цельсия) так же не способен пройти второй ряд данной структуры.

Ключевые слова: фуллерены, фуллерит, наномембраны, разделение газов.

Актуальность.

Задача газоразделения при добыче природного газа представляется крайне важной по ряду причин. Входящий в состав природного газа гелий широко используется в медицине, промышленности и в научных исследованиях. Небольшая концентрация, которая к тому же сильно зависит от месторождения, делает привычные технологии его выделения (криогенную дистилляцию и напорную адсорбцию) не рентабельными на большинстве месторождений природного газа. В качестве альтернативы, предполагается использовать мембранные нанотехнологии для выделения гелия. Наномембрану для подобных технологий можно создать на основе фуллереновых наночастиц или же углеродных нанотрубок. Структура состоящая из молекул фуллерена носит название фуллерит. Наиболее изученная система такого рода кристалл C₆₀, менее система кристаллического C₇₀. Исследования кристаллов высших фуллеренов затруднены сложностью их получения. Наличие такого материала подобного молекулярному кристаллу, позволяет предполагать, что

существует высокая вероятность получить материал подходящий для задач газоразделения.

В рамках данной статьи будет рассмотрен дискретный подход к описанию взаимодействия наночастиц с молекулами метана и атомами гелия. На рисунке 1 приведены три вида частиц - молекула фуллерена C₆₀, молекула фуллерена C₅₄₀ и молекула фуллерена C₇₀.

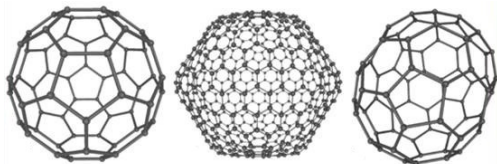


Рис. 1. Аллотропные модификации углерода - фуллерены с различным числом атомов углерода в своей структуре

На рисунке 2 приведен вид кристалла фуллерита.

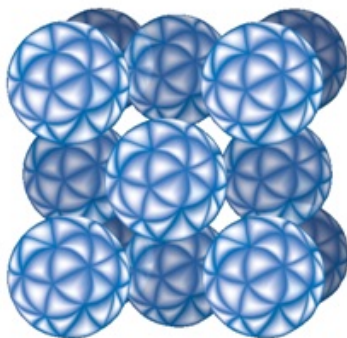


Рис. 2. Кристалл фуллерита

Потенциал Леннард-Джонса.

Потенциал взаимодействия наноструктур с молекулами и атомами в качестве математического аппарата использует на понятие потенциала Леннард-Джонса. Потенциал был предложен Леннард-Джонсом изначально для исследования термодинамических свойств

инертных газов, в частности вириальных коэффициентах. В дальнейшем он широко применялся к исследованию различных систем. Наиболее часто использовался так называемый потенциал (12 – 6) имеющий вид:

$$U(r) = 4 * \varepsilon [(\sigma/r)^{12} - (\sigma/r)^6]$$

Если исследуемая система состоит из разнородных молекул (атомов), то для параметров сигма и эpsilon справедливы правила усреднения Лорентца-Бертло. В данной работе используется модифицированная версия потенциала Леннарда-Джонса.

Взаимодействие с одиночной молекулой фуллерена.

В работе [4] показана локализация зоны сорбции для молекулы фуллерена в случае континуального подхода к описанию взаимодействия. В рамках данной статьи численное моделирование выполнено в рамках дискретного подхода. Результаты вычисления по моделированию, приведенные в этой работе, заключаются в том, что взаимодействие молекулы газов происходит с частицей, состоящей из 60 атомов углерода, расположенных в соответствии с классическим представлением о кристаллической структуре фуллерена – бакибол. Молекула газа (гелия или метана) движется по оси X, до попадания в поле потенциала фуллереновой частицы, а затем начинает сорбционные движения около частицы C60. В результате решения по численной модели для случая дискретного описания фуллереновой частицы C60 получены следующие результаты, представленные на рисунке 3.

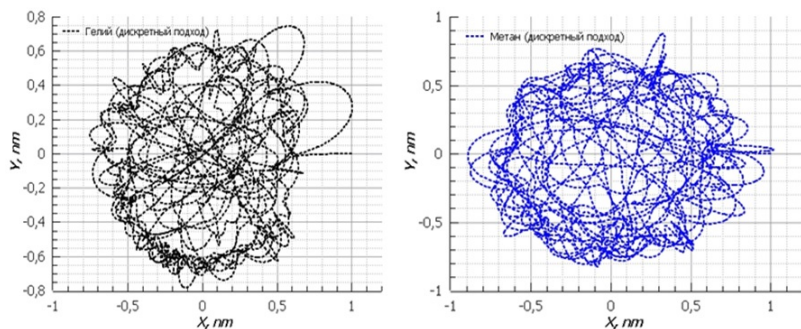


Рис. 3. Траектории сорбционного движения в плоскости XY молекул гелия и метана вокруг наночастицы фуллерена C60 при дискретном подходе описания взаимодействия между ними

Моделирование фуллерита.

При переходе от одиночной молекулы фуллерена к структуре

фуллерита - кристалла состоящего из молекул фуллерена, мы выбрали самый простой вариант её реализации - кристалл с простой кубической решеткой. Результат моделирования расстановки узлов такой структуры приведен на рисунке 4. При этом радиус молекулы фуллерена – 0,357 нм. Минимальное расстояние между объектами данной однопараметрической системы $h=0,35$ нм. После получения численно искомой структуры было проведено моделирование взаимодействия структуры с молекулами метана и атомами гелия.

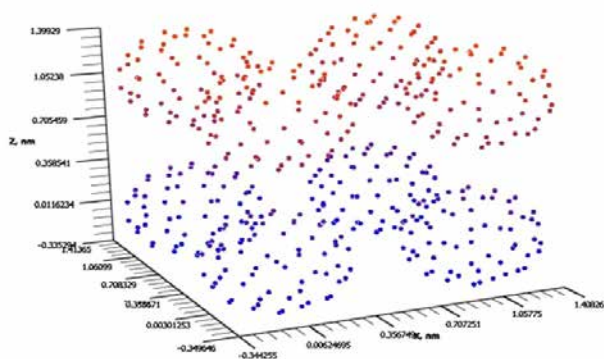


Рис. 4. Кристалл фуллерита, позиции атомов которого получены численно

Результаты численного моделирования процесса взаимодействия атома гелия, молекулы метана и молекулы этана с этим типом структур представлены на рисунках 5 и 6.

Как можно видеть из рисунков, траектории близкие к оси элементарной ячейки являются проницаемыми для каждого типа газа, при скоростях молекулы/атома сравнимых с наиболее вероятными скоростями данных газов, взятых из распределения Максвелла. При нормальных условиях для гелия эта скорость составляет 1300 м/с, а для метана – 750 м/с. Но при отклонении от центра более тяжелые и массивные молекулы метана и этана не способны преодолеть подобный энергетический барьер, а гелий проникает только сквозь первый слой молекул фуллерена.

Выводы.

Результаты моделирования позволяют говорить о том, что в рамках дискретного подхода описания взаимодействия элементар-

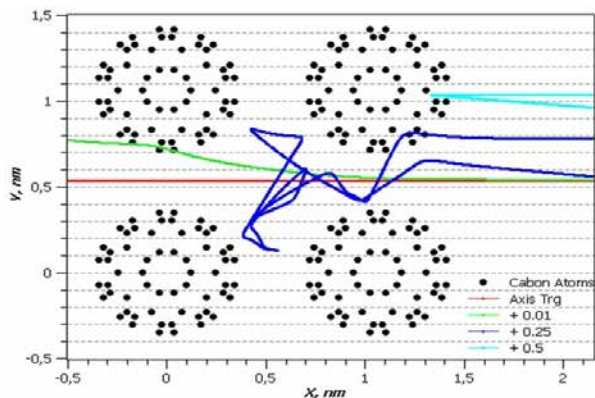


Рис. 5. Кристалл фуллерита взаимодействующий с атомом гелия

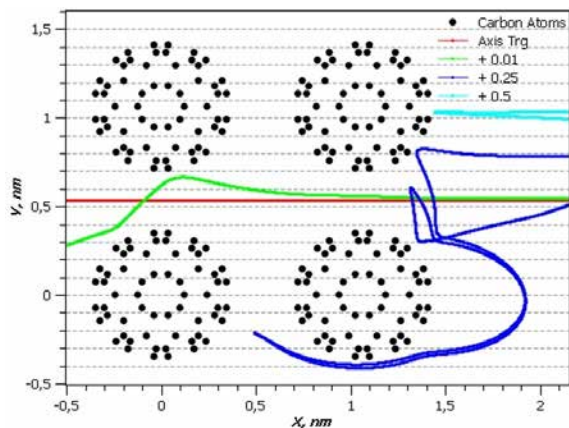


Рис. 6. Кристалл фуллерита взаимодействующий с молекулой метана

ная ячейка мембраны на основе фуллеренов при сближении молекул на расстояние 0,35 нм не пропускает ни один из представленных выше газов в случае отклонения траектории свыше 0.01 нм от осевой.

Литература

1. А.М. Бубенчиков, М.А. Бубенчиков, А.И. Потехаев, Э.Е. Либин, Ю.П. Худобина Потенциальное поле углеродных тел как ос-

нова сорбционных свойств барьерных газовых систем // Известия ВУЗов. Физика. – 2015. – Т. 58, № 7. – С. 10–15.

2. Жаровцев В.В., Маслов А.С., Овчаренко В.В., Тарасов Е.А., Ямкин А.В. Проницаемость системы из двух наночастиц // Известия высших учебных заведений. Физика. 2014. Т. 57. № 8–2. С. 138–141.

3. A. M. Bubenchikov, M.A. Bubenchikov, O.V. Matvienko, E. A. Tarasov, O.V. Usenko, Simple energy Barrier for Component Mixture of Natural Gases // AIP Conference Proceedings, 1698, 060007 (2016).

4. Kim S.-Y., Hwang H.J., Kang J.-W. One-dimensional self-assembly of C60 molecules on periodically wrinkled graphene sheet: A Monte Carlo approach // Physics Letters A, Volume 377. – Issue 43. – 9 December 2013. – P. 3136–3143.

Числа Мерсенна

Каратаева Е. А., Зюзьков В. М.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: nebosolnze@gmail.com

Аннотация

Нахождение чисел Мерсенна важно для задач криптографии, поскольку почти каждое вновь найденное простое число является простым числом Мерсенна. Простой, но медленный метод проверки простоты заданного числа n известен как перебор делителей. Особенно быстрые методы вычисления доступны для чисел, имеющих особые формы, таких как числа Мерсенна. Благодаря удобству проверки простоты числа Мерсенна используются для выявления сверхбольших простых чисел. Также простые числа Мерсенна применяются для построения генераторов псевдослучайных чисел с большими периодами, таких как вихрь Мерсенна. Нахождение простых чисел вида $M_q = 2^q - 1$ является исследовательской проблемой, которой занимаются с начала семнадцатого века.

Ключевые слова: числа Мерсенна, Wolfram Mathematica.

Числа M_n были названы именем французского монаха и математика Марена Мерсенна, рассмотревшего их в своей книге «Cogitata physico-mathematica» (1644) и высказавшего несколько гипотез об их поведении.

Определение 1. Если t — натуральное число, $2^m - 1$ называется числом Мерсенна; если p — простое число и $2^p - 1$ — также простое, то $2^p - 1$ называется простым числом Мерсенна.

Вывод нескольких первых чисел с помощью программы Wolfram Mathematica можно осуществить следующим образом:

```
In[1]:= Table [2p - 1, {p, 1, 20}]
Out[1]= {1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 2047, 4095, 8191,
16 383, 32 767, 65 535, 131 071, 262 143, 524 287, 1 048 575}
Вывод только простых чисел:
In[2]:= f[m_] := 2m - 1;
In[3]:= f[Select[Range[200], PrimeQ[#] && PrimeQ[2# - 1] &]]
Out[3]= {3, 7, 31, 127, 8191, 131 071, 524 287, 2 147 483 647,
2 305 843 009 213 693 951, 618 970 019 642 690 137 449 562 111,
```

162 259 276 829 213 363 391 578 010 288 127,
170 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884 105 727}

Числа Мерсенна замечательны в первую очередь тем, что для них существует эффективный тест на простоту — тест Люка-Лемера.

Теорема 1 (Тест Люка-Лемера). Пусть p — нечетное простое число и $M_p = 2^p - 1$ — число Мерсенна. Определим последовательность целых чисел рекурсивно, положив $r_1 = 4$, и для $k \geq 2$ определяем

$$r_k \equiv r_{k-1}^2 - 2 \pmod{M_p}, 0 \leq r_k < M_p.$$

Число M_p — простое тогда и только тогда, когда $r_{p-1} \equiv 0 \pmod{M_p}$.

Определим функцию, реализующую этот тест в программе Wolfram Mathematica:

```
testLL[p_] := Module[{k = 1, ms = 2^p - 1, r = 4}, While[k < p - 1,  
r = Mod[r^2 - 2, ms]; k++]; r == 0]
```

Проверка правильности работы теста:

```
In[4]:= testLL[31]
```

```
Out[4]= True
```

Тест выдает истину, следовательно, работает правильно. Число 31, действительно, является простым числом Мерсенна.

Известно, что среди первых двух тысяч нечетных простых чисел имеется 22 простых числа Мерсенна. Определить индексы этих чисел можно с помощью следующей программы:

```
In[5]:= Parallelize[Select[Prime[Range[2, 2000]], testLL]]
```

```
Out[5]= {3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279,  
2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213}
```

Самое большое из этих чисел M_{11213} имеет 3376 цифр:

```
In[6]:= Length[IntegerDigits[2^11213 - 1]]
```

```
Out[6]= 3376
```

Слово «Parallelize» означает, что используются параллельные вычисления. Это позволяет вывести большее количество чисел.

В языке Wolfram реализована функция `MersennePrimeExponent[n]`, которая по номеру n в порядке возрастания выдает показатель степени m простого числа Мерсенна $2^m - 1$. Например, получаем первые 7 показателей степени:

```
In[7]:= MersennePrimeExponent[Range[7]]
```

```
Out[7]= {2, 3, 5, 7, 13, 17, 19}
```

и вычисляем соответствующие простые числа Мерсенна:

```
In[8]:= 2^% - 1
```

```
Out[8]= {3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287}
```

Связь с совершенными числами

Существует знаменитая связь между простыми числами Мерсенна и рассматриваемыми еще с древности так называемыми совершенными числами.

Определение 2. Если n – натуральное число и $\sigma(n) = 2n$, то n называется совершенным числом (через $\sigma(x)$ обозначается сумма всех положительных делителей натурального числа x).

Найдем совершенные числа, меньшие 10000 с помощью Wolfram Mathematica:

```
In[9]:= Select[Range[10000], DivisorSigma[1, #] == 2# &]
Out[9]= {6, 28, 496, 8128}
```

Теорема 2. Для того чтобы натуральное число n являлось четным совершенным числом необходимо и достаточно, чтобы $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$, где m – целое со свойствами $m \geq 2$ и $2^m - 1$ – простое число.

Доказательство. Достаточность. Заметим сначала, что из нечетности $2^m - 1$ следует, что $(2^{m-1}, 2^m - 1) = 1$. Так как σ – мультипликативная функция, то $\sigma(n) = \sigma(2^{m-1})\sigma(2^m - 1)$. Имеем $\sigma(2^{m-1}) = 2^m - 1$ и, так как $2^m - 1$ есть простое число, то $\sigma(2^m - 1) = 2^m$. Поэтому $\sigma(n) = (2^m - 1)2^m = 2n$, т. е. n – совершенное число.

То, что число n – совершенное, можно было бы проверить с Mathematica:

```
In[10]:= 2^p-1(2^p-1);
In[11]:= FullSimplify[DivisorSigma[1, n], Element[2^p-1, Primes]]
Out[11]= -2^p+4^p
In[12]: Simplify[% == 2n]
Out[12]= True
```

Необходимость. Пусть n – четное совершенное число. Представим n как $n = 2^s t$, где s и t являются натуральными числами и t нечетно. В силу мультипликативности σ имеем:

$$\sigma(n) = \sigma(2^s t) = \sigma(2^s)\sigma(t) = (2^{s+1} - 1)\sigma(t) \quad (1)$$

Так как n – совершенное число, то имеем:

$$\sigma(n) = 2n = 2^{s+1}t. \quad (2)$$

Комбинируя (1) и (2), видим, что

$$(2^{s+1} - 1)\sigma(t) = 2^{s+1}t. \quad (3)$$

Поскольку $(2^{s+1} - 1, 2^{s+1}) = 1$, то 2^{s+1} делит $\sigma(t)$. Поэтому существует такое целое q , что $\sigma(t) = 2^{s+1}q$. Вставляя это выражение

для $\sigma(t)$ в (3), получаем $(2^{s+1} - 1)2^{s+1}q = 2^{s+1}t$ и поэтому

$$(2^{s+1} - 1)q = t \quad (4)$$

Следовательно, $q|t$ и $q \neq t$.

Сложив почленно равенство (4) и тождество $q = q$, получаем

$$t + q = (2^{s+1} - 1)q + q = 2^{s+1}q = \sigma(t). \quad (5)$$

Докажем, что $q = 1$. Заметим, что если $q \neq 1$, то имеется три различных положительных делителя t , именно, 1, q и t . Следовательно, $\sigma(t) \geq 1 + q + t$, но это противоречит (5). Поэтому $q = 1$ и из (4) заключаем, что $t = 2^{s+1} - 1$. Также из (5) получаем $\sigma(t) = t + 1$, откуда следует, что t — простое число, так как единственные делители t — это 1 и t . Окончательно имеем $n = 2^s(2^{s+1} - 1)$, где $2^{s+1} - 1$ есть простое число.

Теорема 2 сообщает нам, что для поиска четных совершенных чисел необходимо искать простые числа вида $2^m - 1$.

Древним было известно четыре совершенных числа: $6=2^*M_2$, $28=2^2*M_3$, $496=2^4*M_5$ и $8128=2^6*M_7$, то есть они знали четыре первых простых числа Мерсенна: $M_2=3$, $M_3=7$, $M_5=31$ и $M_7=127$.

Поиск простых чисел Мерсенна $2^m - 1$ можно облегчить, если заметить, что m должно быть также простым числом.

Теорема 3. *Если m — натуральное число и $2^m - 1$ есть простое число, тогда m — простое число.*

Доказательство. Заметим, что $m > 1$. Теперь, от противного, пусть $m = ab$, где $1 < a < m$ и $1 < b < m$. Легко проверить, что $2^m - 1 = 2^{ab} - 1$ есть составное число. Например, это можно сделать с помощью Mathematica:

```
In[13]:= Simplify  $\left[ (2^a - 1) \sum_{i=1}^b 2^{a(b-i)} \right]$ 
```

```
Out[13]=  $-1 + 2^{ab}$ 
```

Так как оба сомножителя $2^{ab} - 1$ больше 1, то это число составное.

Рост простых чисел Мерсенна на графике представлен на рис. 1.

График становится более наглядным, если использовать логарифмический масштаб на оси ординат (рис. 2).

В 1999 году было найдено первое простое число, имеющее более миллиона десятичных знаков: оно является 38-м простым числом Мерсенна.

В 2008 году было получено 47-е известное простое число Мерсенна. Оно имеет почти тринадцать миллионов (точно: 12 978 189) десятичных знаков.

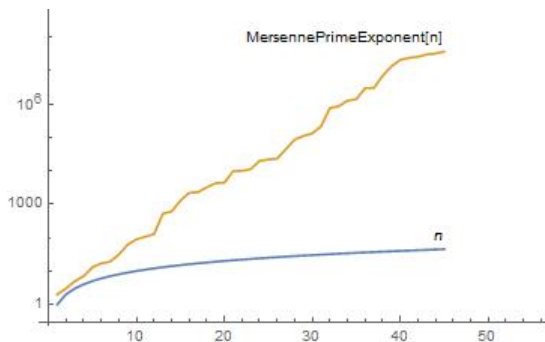


Рис. 1. Рост простых чисел Мерсенна при логарифмическом масштабе на оси ординат

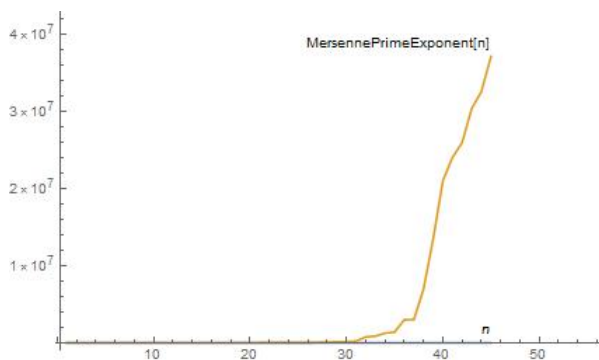


Рис. 2. Рост простых чисел Мерсенна

В настоящее время известно 50 простых чисел Мерсенна. Последнее число открыто в декабре 2017 г. и имеет 23 249 425 десятичных цифр. Для сравнения: в романе «Война и мир» всего около 3,1 миллиона символов. Это число составляет примерно восемь таких романов. Оно является не только наибольшим известным на сегодняшний день простым числом Мерсенна, но и наибольшим из найденных явно простых чисел вообще. За редкими исключениями рекорд максимального открытого простого числа всегда принадлежал именно простым числам Мерсенна.

Современный поиск чисел Мерсенна

С появлением и бурным развитием Интернета всё большую популярность стала получать идея добровольного использования для

организации распределённых вычислений компьютеров простых пользователей, соединённых через Интернет. В январе 1996 года стартовал проект GIMPS по поиску простых чисел Мерсенна.

GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search) — широкомащтабный проект добровольных вычислений по поиску простых чисел Мерсенна. Распределённый проект по поиску простых чисел GIMPS считается самым длительным непрерывным процессом распределённых вычислений в истории человечества: он продолжается уже почти 17 лет. Сейчас в пиковые моменты в GIMPS участвует 360 000 процессоров с суммарной производительностью 150 трлн операций в секунду.

Самое большое известное на данный момент простое число было найдено в рамках проекта GIMPS. Более того, 14 предыдущих рекордов также были установлены участниками GIMPS.

Литература

1. Зюзьков В. М. Начала компьютерной алгебры: учебное пособие. — Томск: Издательский Дом ТГУ, 2015. — 128 с.
2. Math World. Mersenne Prime. Электронный ресурс: <http://mathworld.wolfram.com/MersennePrime.html>
3. Math World. Perfect Number. Электронный ресурс: <http://mathworld.wolfram.com/PerfectNumber.html>
4. Новости информационных технологий. Электронный ресурс: <http://www.pvsm.ru/matematika/>
5. Деза Е. И. Специальные числа натурального ряда: учебное пособие. М.:Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. —240 с.

Криптоанализ шифра Плейфера с помощью алгоритма «имитации отжига»

Куттубек К.Г., Старченко А.В.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: wendiya97@gmail.com

Аннотация

В данной работе проведен криптоанализ шифра Плейфера с помощью алгоритма «имитации отжига». Сформулирована математическая постановка задачи глобальной оптимизации применительно к криптоанализу шифра Плейфера. Построена блок-схема программы, которая позволяет расшифровать сообщение без наличия известного ключа. Реализована программа дешифрования на языке программирования PascalABC. Проведена оценка скорости нахождения ключа в зависимости от длины шифртекста и оценка вероятности принятия непригодных ключей в зависимости от параметров алгоритма «имитации отжига».

Ключевые слова: Криптоанализ шифра Плейфера, алгоритм «имитации отжига», задача глобальной оптимизации, частотный анализ, тетраграфы, триграммы, биграммы, коэффициент пригодности текста.

Шифр Плейфера Шифр Плейфера был изобретен английским физиком Чарльзом Уитстоном в 1854 году [1]. Назван в честь лорда Лайона Плейфера, который внес большой вклад в популяризацию данного шифра. Техника шифрования является симметричной. Использовался немецкими войсками во время второй мировой войны, а также британскими вооруженными силами в первой мировой войне. Процесс шифрования представлен на рис.1

Если удастся перехватить англоязычный текст, зашифрованный шифром Плейфера, и попытаться подобрать к нему ключ простым перебором всех вариантов, то нужно будет рассмотреть минимум $26! > 4 \times 10^{26}$ ключей. Разумеется, на это потребуется много времени, поэтому для взлома шифра необходимо применить более утонченный математический аппарат. Например, рекомендуется [2] использовать метод, называемый алгоритмом «имитации отжига» (Simulated Annealing).

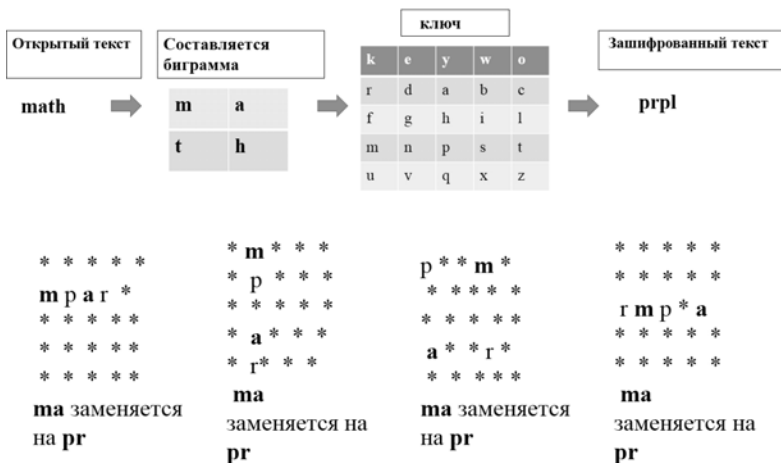


Рис. 1. Правила шифрования

Алгоритм «имитации отжига» для криптоанализа шифра Плейфера Изобрел этот алгоритм американский математик и физик Николас Константин Метрополис. Конечной целью алгоритма является нахождение глобального минимума (максимума) некоторой вещественной функции нескольких переменных.

Сам алгоритм основывается на имитации физического процесса, который происходит при кристаллизации вещества, в том числе при отжиге металлов. Суть процесса заключается в том, что перед охлаждением металл на некоторое время подвергают существенно нагреванию, выдерживают его определенное время при температуре рекристаллизации, а затем начинают медленно охлаждать. В ходе отжига (охлаждения после нагревания) структура металла избавляется от значительного числа имеющихся деформаций; энергетических дисбалансов и напряжений становится меньше и металл оказывается прочнее и пластичнее, а структура более однородной, чем до отжига [2].

У алгоритма «имитации отжига» имеются несколько важных входных параметров: начальная температура T , шаг температуры $STEP$ и количество итераций $COUNT$. Чем выше значение $COUNT$, тем больше вероятность того, что решение будет найдено, но при этом время работы программы может значительно увеличиться. Аналогичным образом ведет себя алгоритм при уменьшении параметра $STEP$. Что касается параметра T , то чем выше его значение,

тем выше вероятность нахождения глобального минимума (максимума). Кроме того, значение T следует увеличивать с ростом количества параметров функции. Например, для криптоанализа зашифрованного текста T должно меняться в зависимости от длины текста. Для зашифрованных текстов длиной около 100 символов начальное значение T обычно выбирают 10, но, если текст имеет длину 300 символов, величина T должна равняться 20 или выше [2]. Основным показателем пригодности найденного ключа является полученный дешифрованный текст. Чем больше текст похож на осмысленный набор слов, тем выше его коэффициент пригодности. Для того, чтобы проверить полученный текст на схожесть с английским (или любым другим языком) используются:

Биграммы – набор из 2 букв. Например, в английском языке для слова SCHOOL: SC, CH, HO, OO, OL.

Триграммы – набор из 3 букв. Например, для слова SCHOOL: SCH, OOL, CHO, HOO.

Тетраграфы (Qgramm) -это набор из 4 букв, произносимый как один звук. Например, в английском языке для слова SCHOOL: SCHO, CHOO, HOOL.

В [4] указывается, что при проведении проверки на близость текста к тексту на естественном (например, английском) языке лучше использовать известные частоты употребления тетраграфов, чем триграмм и, в свою очередь, частоты триграмм, чем биграмм и т.д.

Для подсчета коэффициента пригодности заданного (расшифрованного) текста определенному языку его следует разбить на множество тетраграфов (аналогично триграмм, биграмм). Формула для подсчета коэффициента пригодности текста будет выглядеть следующим образом [4]: $\ln P(\text{Text}) = \sum_{i=1}^N \ln P(Qgramm_i)$, где N - общее количество тетраграфов, а $\ln P(Qgramm_i)$ -относительная частота i -го тетраграфа в тексте, которые уже посчитаны и имеются в свободном доступе. Полученная величина логарифмируется во избежание получения значений, близких к нулю.

Очевидно, что есть тетраграфы, которые встречаются гораздо чаще, чем другие, а некоторые и вовсе не встречаются. Этот факт, как раз-таки помогает нам определить насколько полученный текст является осмысленным.

Математическая постановка задачи Общий вид задачи выглядит следующим образом: Пусть $P : \Omega \times K \rightarrow R$, где Ω вероятностное пространство тетраграфов, а K пространство ключей.

Говорят, что $P(x, k)$, где x из множества Ω , а k из множества K , имеет локальный максимум в точке (x^*, k^*) , если существует некоторая $\varepsilon > 0$ - окрестность этой точки, в которой выполняется: $\|P(x^*, k^*)\| \geq \|P(x, k)\|$, для любого k из интервала $(k^* - \varepsilon, k^* + \varepsilon)$.

Так как у функции может быть много локальных максимумов, наша задача сводится к поиску глобального максимума, для которого будет выполняться условие $\|P(x^*, k^*)\| \geq \|P(x, k)\|$, для любого k из K

Элементы подмножества Ω представляют собой тетраграфы, $k \in \mathbb{K}$ - ключи, а значение функции $\ln P(x, k)$ в этих точках x будет является коэффициентом пригодности текста, полученным в ходе преобразования ключом k .

При использовании алгоритма «имитации отжига» для нахождения глобального максимума функции $\ln P(x^*, k^*)$ в алгоритме рассматривается уменьшающаяся с течением времени температура «отжига». Она влияет на вероятность принятия нового ключа в качестве максимума, следующим образом [2]:

Если $dP = \ln P(x^*, k^*) - \ln P(x, k) \geq 0$, то в качестве максимума принимается точка (x^*, k^*) .

Если $dP = \ln P(x^*, k^*) - \ln P(x, k) \leq 0$, то принятие точки $*$ в качестве нового максимума происходит следующим образом:

Если $e^{\frac{dP}{T}} \geq \xi$, где ξ - псевдослучайная величина из $[0, 1]$, то точка x^* принимается в качестве нового максимума, в противном случае за x^* принимается старое значение и осуществляется переход к следующему шагу.

Ниже приведена блок-схема программы (рис. 2), где «Т» - температура, «PKEY» - текущий ключ, «SKEY» - следующий ключ, «COUNT» - количество итераций, «P(TEXT,KEY)» - функция, которая считает коэффициент пригодности шифртекста (TEXT), расшифрованного ключом «KEY», «DP» - разность между коэффициентом пригодности текста, расшифрованного текущим ключом и следующим:

Внутренний цикл при каждом шаге изменения температуры производит около 50000 итераций, а температура во внешнем цикле при этом постепенно снижается, в итоге к концу работы программы вероятность того, что в качестве «parent-key» PKEY мы примем непригодный ключ, стремится к нулю.

Следует отметить, что обычной генерации ключа «current-key» SKEY за счет перестановки двух символов в одной строке или

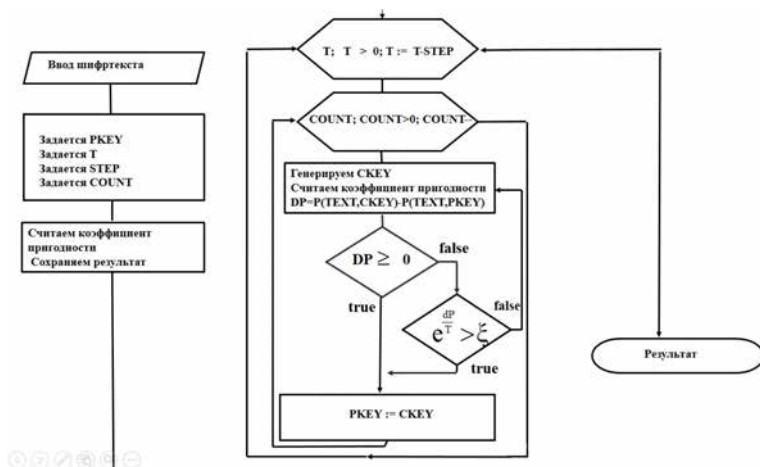


Рис. 2. Блок – схема программы

столбце будет недостаточно. Тут потребуется более сложная схема модификации ключей. К примеру, перестановка строк, замена столбцов, переворты матрицы ключа, транспонирование и т.д. Такой подход ускорит поиск нужного ключа.

В заключение отметим, что описанный алгоритм криптоанализа отлично подходит для таких классических шифров, как Vifid, Phillips и Fractionated Morse, причем можно использовать те же входные переменные. Однако процесс генерации ключей необходимо изменить, так как ключи у всех рассмотренных выше шифров составляются по-разному [2].

Анализ работы программы Следующий график показывает процесс поиска решения при длине шифртекста = 254 символа и при температуре = 20.

По графику (рис.3) видно, что работающая программа, пропускающая какие-то шаги, находит локальные максимумы, но конечным результатом является глобальный максимум на итерации 15. Именно к этому моменту в результате выполнения алгоритма «имитации отжига» отыскивается подходящий ключ для расшифровки текста, зашифрованного шифром Плейфера.

Как было представлено выше, факторами, определяющими скорость нахождения решения – ключа для дешифрования заданного текста, являются начальное значение температуры в алгоритме

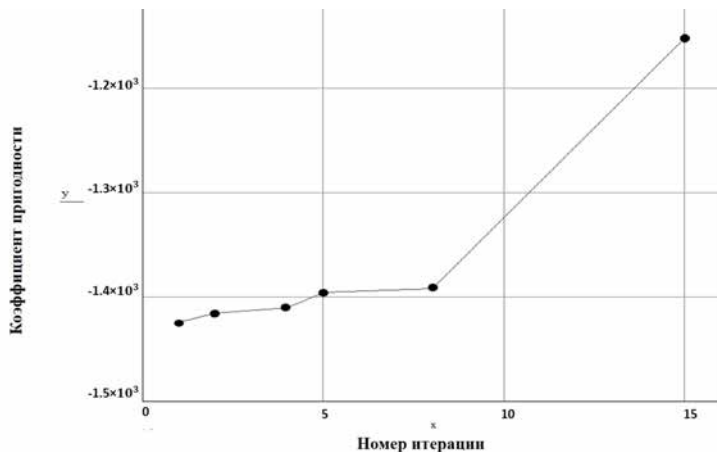


Рис. 3. График поиска решения

«имитации отжига» и длина зашифрованного текста. Чем короче зашифрованный текст, тем дольше будет выполняться программа поиска. Причем увеличение времени происходит экспоненциально. Причина, по которой более длинные зашифрованные тексты решаются быстрее, в том, что они содержат большое разнообразие тетраграфов, что приводит к выбору наиболее подходящего ключа. На рис.4 показано изменение времени решения в зависимости от длины шифротекста при $T=20$. Из рис. 4 видно, что при длине зашифрованного текста в 200 символов работа программы составляет около трех минут, а вот при уменьшении длины текста в 4 раза время работы программы увеличивается в десятки раз. Вторым параметром, влияющим на поиск решения, является началь-

Таблица 1. Время работы программы в зависимости от длины шифротекста

Длина шифротекста	Время работы программы, мин
254 символа	3,6
170 символов	6,01
103 символа	4,2
86 символов	30,0
70 символов	2 часа
50 символов	3 часа и больше

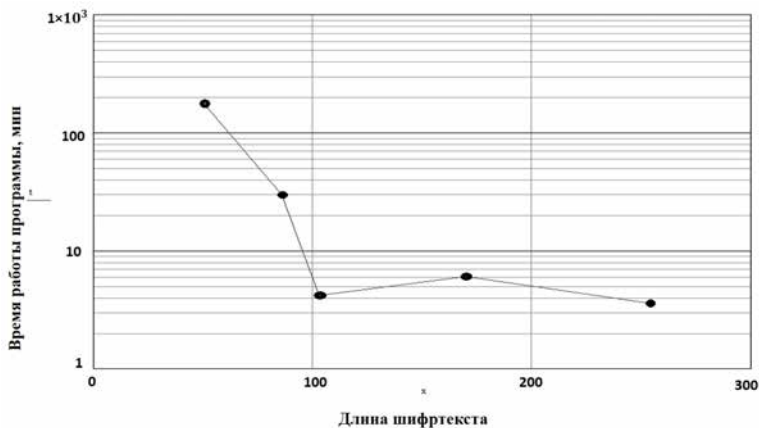


Рис. 4. График изменения времени работы программы в зависимости от длины шифртекста (ось ординат имеет логарифмический масштаб)

ное значение температуры T . В зависимости от длины шифртекста, можно посчитать оптимальную температуру системы по формуле [2]: $T = 10 + 0.087 * (L - 84)$, где $L > 84$ — длина шифртекста. Оптимальное значение температуры необходимо во избежание ситуации, когда программа уже нашла решение, но продолжает работать, тем самым удлиняя время работы программы.

Следующий график (рис. 5) наглядно показывает процесс поиска решения при разных начальных значениях температуры T . К примеру, при $T=200$ ключ, у которого коэффициент пригодности текста меньше коэффициента пригодности текста родительского ключа на 200 будет принят с вероятностью 0.5, в то время как при $T=50$ вероятность принятия такого ключа почти равна 0.

Заключение Разработана программа, реализующая алгоритм «имитации отжига» применительно к решению задачи криптоанализа шифра Плейфера.

В результате проведенных вычислительных экспериментов было выявлено, что время поиска подходящего ключа обратно пропорционально длине шифртекста. При длине текста в 50 символов время работы программы увеличилось на несколько часов в сравнении с расшифровкой текста длиной в 254 символа (поиск занял всего лишь три минуты). Процесс поиска решения можно классифициро-

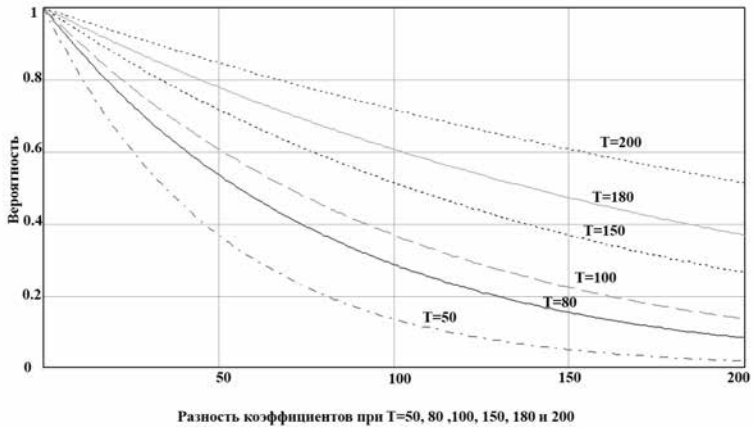


Рис. 5. График изменения вероятности принятия непригодного ключа в зависимости от температуры.

вать по трём фазам: - в первой фазе, пока температура в алгоритме «имитации отжига» еще высокая, отсева ключей почти нет; - в средней фазе фильтрация непригодных ключей становится жестче; - на заключительной стадии, когда температура в алгоритме «имитации отжига» принимает невысокие значения, вероятность принятия непригодного ключа близка к нулю.

На графике поиска решения видно, что ключ, который позволяет наилучшим образом дешифровать текст, имеет наибольший коэффициент пригодности.

Литература

1. Пилиди В.С. Криптография. Вводные главы В.С.Пилиди – Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2009. – 110 с.
2. Cowan M.J. Breaking short Playfair ciphers with the simulated annealing algorithm [Электронные ресурсы]: Cryptologia / Taylor and Francis Group. – Электрон. журн. – 2008. – URL: <https://doi.org/10.1080/01611190701743658> (дата обращения: 01.04.2018).
3. Савельева А.А. Технологии и продукты Microsoft в обеспечении информационной безопасности А.А. Савельева, В.А. Сердюк, С.М. Авдошин. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий, 2010. – 384 с.

4. Cryptanalysis of the Playfair cipher [electronic resource] // Practical cryptography / Copyright James Lyons. – [S. 1.], 2009–2012 – URL : <http://practicalcryptography.com/cryptanalysis/stochastic-searching/cryptanalysis-playfair/>

Расчет условной пропускной способности регулирующего осевого клапана

Лещинский Д. В., Данилкин Е. А., Быкова Т.А.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: 360flip182@gmail.com

Аннотация

При проектировании системы нефте- и газопроводов возникает необходимость установки ряда регулирующих клапанов для реализации тех или иных задач стоящих перед данным участком трубопровода. В данной работе рассматривается математическое моделирование турбулентного течения в осевом регулирующем клапане и расчет условной пропускной способности клапана на основе рассчитанных интегральных характеристик течения. Расчеты проведены в программе ANSYS Fluent.

Ключевые слова: регулирующий клапан, турбулентное течение, уравнения Навье – Стокса, RANS, ANSYS Fluent.

Введение

На современном этапе развития вычислительной техники и САЕ-систем численный эксперимент становится важным этапом в проектировании новых высокотехнологичных изделий [1]. Таким образом, результаты, полученные с помощью математического моделирования, позволяют обнаружить и устранить основные недостатки конструкции еще на этапе проектирования изделия. Так, в данной работе будет представлена методика проведения гидродинамического расчета осевого регулирующего клапана, которая нацелена на замену натурального эксперимента численным.

Объект исследования

Объектом исследования данной работы является осевой регулирующий клапан (Рис. 1), используемый в нефтегазовой промышленности. Особенностью данного клапана является то, что его особая конструкция обеспечивает спрямленное осесимметричное и не встречающее препятствий течение среды между внутренним и наружным корпусами клапана. Основными элементами данного клапана являются: корпус, поршень и трим.

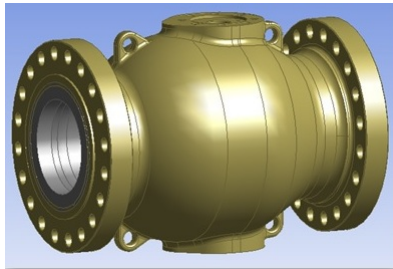


Рис. 1. Иллюстрация осевого регулирующего клапана

Трим (Рис. 2) – деталь имеющая форму полого цилиндра с отверстиями на боковых стенках, также одна из важнейших деталей в осевом регулирующем клапане, определяющая его пропускную характеристику. Данная характеристика напрямую зависит от геометрии трима, а точнее от характера расположения отверстий и их размеров. Так, при равномерном покрытии отверстиями боковых стенок трима (Рис. 2а) клапан будет иметь линейную пропускную характеристику, а при многоступенчатом (Рис. 2б) – равнопроцентную.

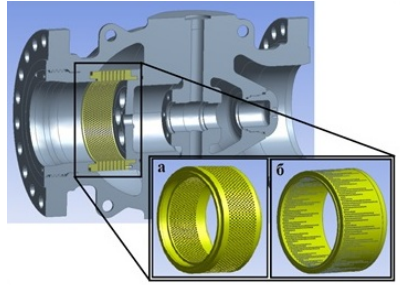


Рис. 2. Иллюстрация вариаций трима

Поршень (Рис. 3) – это устройство для регулировки потока среды через клапан, которое осуществляется путем перекрытия отверстий на триме. В данной работе необходимо, чтобы поршень клапана был полностью открыт.

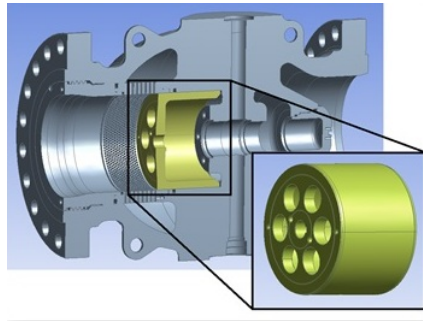


Рис. 3. Иллюстрация поршня

Физико-математическая постановка задачи

Моделируется процесс трёхмерного стационарного турбулентного изотермического течения несжимаемой среды в проточной части регулирующего клапана осевого типа с заданным условным проходом Ду (Рис. 4). Задача определить условную пропускную способность клапана.

Математическая модель включает в себя осреднённое по Рейнольдсу уравнение неразрывности и уравнения Навье – Стокса[2]:

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

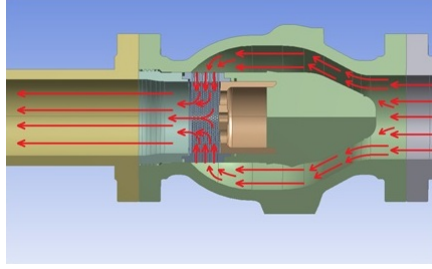


Рис. 4. Иллюстрация течения жидкости через клапан

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\langle \partial \rho \rangle}{\langle \partial x_i \rangle} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle U'_i U'_j \rangle, \quad (2)$$

где $\langle U_i \rangle$ – осредненные проекции вектора скорости на оси координат Ox_i , $\langle p \rangle$ – давление, ρ – плотность, ν – кинематическая вязкость воздуха, $\langle U'_i U'_j \rangle$ – тензор напряжений Рейнольдса ($i, j = 1, 2, 3, \dots$).

Для замыкания системы уравнений (1)-(2) была использована градиентно-диффузионная гипотеза Буссинеска, а также двухпараметрическая стандартная « k - ε » модель. Стандартная « k - ε » модель позволяет получить качественные результаты для поставленной задачи за приемлемый промежуток расчетного времени. Кинетическая энергия турбулентности k и скорость ее диссипации ε в стандартной « k - ε » модели являются решением системы транспортных уравнений [3]:

$$-\langle U'_i U'_j \rangle = \nu_t \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad \nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \langle U_j \rangle k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P - \varepsilon, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \langle U_j \rangle \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon 1} P - c_{\varepsilon 2} \varepsilon); \quad (5)$$

где ν_t – турбулентная вязкость, k – кинетическая энергия турбулентности, ε – диссипация турбулентной кинетической энергии, $P = -\langle U'_i U'_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j}$ – генерация энергии турбулентности, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $c_{\varepsilon 1} = 1.44$, $c_{\varepsilon 2} = 1.92$, $C_\mu = 0.09$ (эмпирические констан-

ты).

Граничные и начальные условия для рассматриваемой задачи задаются следующим образом:

- давление на входе: $\langle P \rangle_{inlet} = 63$ МПа;
- давление на выходе: $\langle P \rangle_{outlet} = 62$ МПа;
- на стенках – условие прилипания: $U = 0$.

Движение рабочей среды (воды) обеспечивается перепадом давлений во входном и выходном сечениях клапана. В качестве начального приближения в расчетной области принимается однородное распределение значений искомых характеристик: $U = 0$, $P_0 = 63$ МПа.

Построение области исследования

Для построения области исследования используется упрощенная твердотельная модель регулирующего клапана осевого типа. С точки зрения моделирования гидродинамики интерес представляет проточная часть клапана, построение которой осуществляется с использованием инструментов программного продукта ANSYS Design Modeler путем заполнения пустого объема твердотельной модели клапана [2]. Так как целью работы является замена натурального эксперимента, то и геометрия области исследования построена по аналогии с испытательным стендом и состоит из проточной части регулирующего клапана осевого типа и дополнительных прямых участков трубопровода для стабилизации потока [4].

Геометрические размеры участков стабилизации потока выбираются в соответствии с ГОСТом [4], так условный проход трубопровода до и после исполнительного устройства должен быть равен условному проходу исполнительного устройства. Длина прямолинейного участка трубопровода до исполнительного устройства должна быть не менее $(2 \pm 0,5)Dy$ и $(10 \pm 1)Dy$ после исполнительного устройства. Так как область исследования имеет радиальную симметрию, то достаточно будет рассмотреть лишь периодичный сегмент проточной части (Рис. 5).

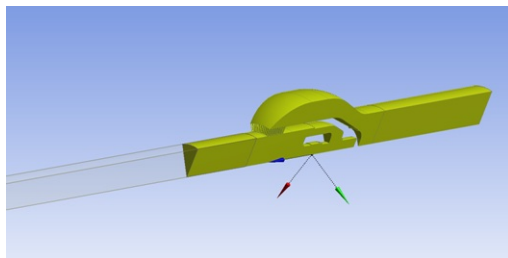


Рис. 5. Построенная область исследования

Разностная сетка

Далее была построена разностная сетка с общим количеством 2 308 041 элементов. При этом выполнено сгущение сетки у стенок (3 мм) и в триме. На рисунке 6 представлена построенная конечно-объемная сетка, на проточной части клапана при полном открытии поршня.

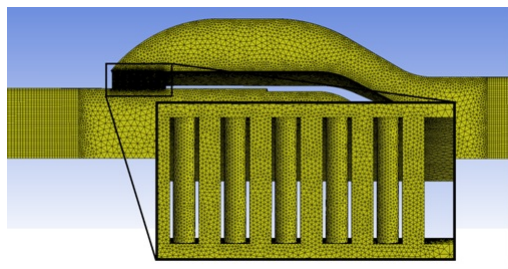


Рис. 6. Сетка проточной части в области трима

Вычисление пропускной способности клапана

Расчет течения проводился с помощью программного комплекса FLUENT с использованием метода согласования полей скорости и давления Coupled и схем аппроксимации второго порядка по времени и пространству. Контроль точности решения осуществлялся по невязкам (точность 10^{-5}). При этом процесс сходимости к решению задачи анализировался также по значениям давления на выходе, расхода на входе и выходе на каждой итерации.

Основной целью проведения вычислительного эксперимента является расчет условной пропускной способности осевого регулирующего клапана с заданным диаметром условного прохода. Под

условной пропускной способностью принято считать объемный расход жидкости в м³/ч плотностью 1000 кг/м³, пропускаемой через клапан при перепаде давления на нем 1 кгс/см² (1 бар). Согласно ГОСТ 14691 69 [7], расчет условной пропускной способности Kv_{max} осуществляется по формуле:

$$Kv_{max} = Q_{max} \sqrt{\frac{\gamma}{\Delta P_{min}}}; \quad (6)$$

где Kv_{max} – условная пропускная способность, Q_{max} – объемный расход жидкости, ΔP_{min} – перепад давлений в клапане, γ – удельный вес жидкости.

После получения численного решения снимаются интегральные параметры течения: объемный расход жидкости, а также давление на входе и выходе, для вычисления перепада давления. На основании полученного расхода, возникшего перепада давления и формулы (6) можно получить условную пропускную способность.

Анализ данных

Согласно построенной проточной части и конечно-объемной сетки на ней, был проведен гидродинамический расчет для регулирующего клапана осевого типа с условным проходом $D = 250$ мм. Периодический сегмент составляет 46,9570°.

По формуле (6) и на основании данных, полученных путем гидродинамического расчета в пакете ANSYS Fluent, рассчитана условная пропускная способность клапана, которая составляет 862,940 м³/ч.

Помимо интегральных характеристик потока, пакет Fluent дает возможность построить поля скорости и давления. Картина течения в виде поля векторов скорости при открытии клапана на 100% представлена ниже, на рисунке 9.

Заключение

Таким образом, был проведен расчет условной пропускной способности и вычислены интегральные характеристики для регулирующего клапана осевого типа в пакете ANSYS Fluent.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МК-1723.2017.5.

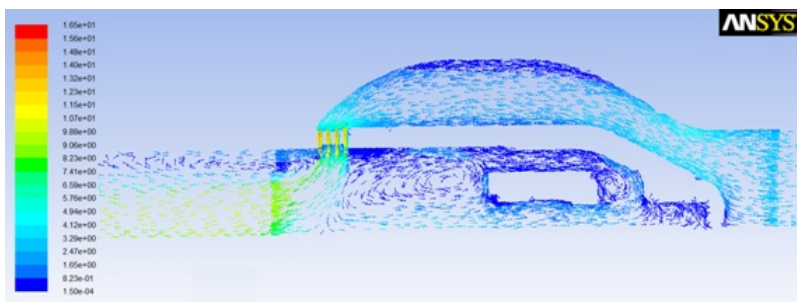


Рис. 7. Поле векторов скорости

Литература

1. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Гидродинамика. 3-е изд. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц . – М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 736 с. (т. VI).
2. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч, – Мир, 1980. – 618 с.
3. URL : <https://www.ansys.com/>
4. ГОСТ 11881-76, ГСП. Регуляторы, работающие без использования постоянного источника энергии, М: Государственный комитет СССР по стандартам, Москва, 1971. 25 с.
5. ГОСТ 16443-70, Устройства исполнительные. Методы расчета пропускной способности, выбора условного прохода и пропускной характеристики, М: Государственный комитет СССР по стандартам, Москва, 1971. 25 с.

Математическое моделирование процессов биологической очистки сточных вод на основе модели Кенейла

Хуторная А. И., Михайлов М. Д.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: anas-kh@yandex.ru

Аннотация

Рассматривается модель Кенейла и ее модификация, основанная на усложненной пищевой цепочке вида: субстрат - бактерии - простейшие.

Математически модели представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями. Для численной реализации используется неявный метод Эйлера. Исследуются вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости метода. Результаты численных расчетов представлены в виде графиков. Дается анализ полученных результатов.

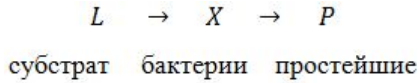
Ключевые слова: биологическая очистка, субстрат, бактерии, микроорганизмы, простейшие, модель, аппроксимация, устойчивость, сходимость, неявная схема.

Загрязнение окружающей среды отходами промышленного и сельскохозяйственного производства негативно сказывается на состоянии атмосферы населенных пунктов, водных ресурсов и здоровья населения. В связи с этим большое внимание уделяется проблемам экологии, в частности, очистки от загрязнения сточными водами. Поскольку сточные воды содержат множество различных органических веществ, важным звеном в процессе самоочищения является биологическая очистка. О ее сути говорится в [1].

В случае с активным илом сточные воды являются субстратом, который служит пищей для бактерий. Следует ожидать, что активный ил, растущий на таком субстрате, будет иметь сложный многовидовой состав. Поэтому процесс биологической очистки состоит в том, что гетерогенная популяция микроорганизмов потребляет многокомпонентный субстрат [2].

Особый интерес вызывает формирование биоценоза активного ила, так как видовой состав ила влияет на его активность и способность к отстаиванию. При изучении этого вопроса целесообразно

использовать модель Кенейла [2], в которой учитываются два трофических уровня и субстрат, а пищевая цепочка выглядит следующим образом:



Простейшие, питаясь бактериями и взвешенными веществами, способствуют осветлению воды и, до известной степени, обеззараживают ее. Кроме того, простейшие выполняют функцию индикаторов. По их развитию можно судить о качестве очистки сточных вод. Таким образом, модель Кенейла описывает пищевую цепочку между растворимым субстратом, гетеротрофной бактерией и простейшей реснитчатой [2]:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = -\frac{1}{Y} \frac{\mu_{max}XL}{K_L + L}, \\ \frac{dX}{dt} = \frac{\mu_{max}XL}{K_L + L} - \frac{f_{max}XP}{g(K_x + X)}, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{f_{max}XP}{K_x + X}, \\ L(0) = L^0, X(0) = X^0, P(0) = P^0, \end{cases} \quad (1)$$

где μ_{max} – максимальная удельная скорость роста микроорганизмов; K_L – константа полунасыщения, равная концентрации субстрата, при которой скорость процесса равна $\frac{\mu_{max}}{2}$, Y – коэффициент трансформации субстрата в биомассу; L, X, P – концентрация субстрата, бактерий и простейших соответственно, мг/л; f_{max} – максимальная удельная скорость роста реснитчатой; K_x – константа полунасыщения, равная концентрации бактерии, при которой скорость процесса равна $\frac{f_{max}}{2}$; g – экономический коэффициент простейших.

На рис. 2 представлены изменения концентраций основных параметров модели Кенейла с течением времени. Из графика изменения L видно, что очищение водоема происходит в течение 36 ч.

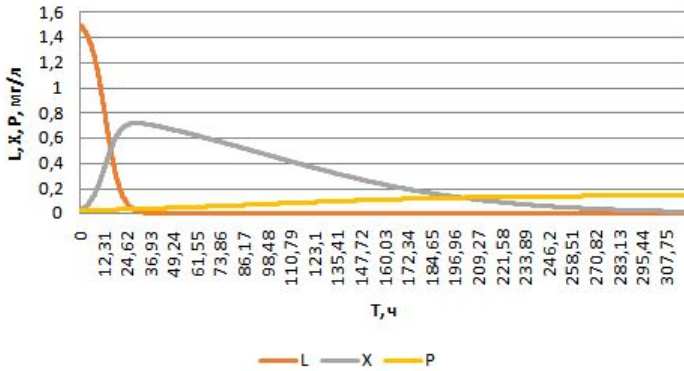


Рис. 1. Результаты численных расчетов модели Кенейла

Описание неявного метода Эйлера. Вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости

Для численного решения задачи (1) используется неявный метод Эйлера [3]. Вводится равномерная сетка $\omega_\tau = \{t_j | t_j = j\tau, j = 0, N\}$, и разностные уравнения для системы (1) записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{L_{j+1} - L_j}{\tau} = -\frac{1}{Y} \frac{\mu_{max} X_{j+1} L_{j+1}}{K_L + L_{j+1}}, \\ \frac{X_{j+1} - X_j}{\tau} = \frac{\mu_{max} X_{j+1} L_{j+1}}{K_L + L_{j+1}} - \frac{f_{max} X_{j+1} P_{j+1}}{g(K_x + X_{j+1})}, \\ \frac{P_{j+1} - P_j}{\tau} = \frac{f_{max} X_{j+1} P_{j+1}}{K_x + X_{j+1}}, \\ L_0 = L^0, X_0 = X^0, P_0 = P^0. \end{cases} \quad (2)$$

Для исследования устойчивости разностной схемы (2) по начальным данным методом гармоник необходимо ее линеаризовать. Для этого используются следующие соотношения:

$$L_j = \dot{L}_j + \tilde{L}, X_j = \dot{X}_j + \tilde{X}, P_j = \dot{P}_j + \tilde{P}, \quad (3)$$

где $\dot{L}_j, \dot{X}_j, \dot{P}_j$ - малые величины, $\tilde{L}, \tilde{X}, \tilde{P}$ - значения L, X, P, определяющие положение стационарного равновесия, то есть

$$\frac{d\tilde{L}}{dt} = \frac{d\tilde{X}}{dt} = \frac{d\tilde{P}}{dt} = 0.$$

После подстановки (3) в (2) разностная схема линеаризуется

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{L}_{j+1} - \dot{L}_j}{\tau} = -\frac{1}{Y} \frac{\mu_{max} \tilde{L} \dot{X}_{j+1} + \tilde{X} \dot{L}_{j+1}}{K_L + \tilde{L}}, \\ \frac{\dot{X}_{j+1} - \dot{X}_j}{\tau} = \frac{\mu_{max} (\tilde{L} \dot{X}_{j+1} + \tilde{X} \dot{L}_{j+1})}{K_L + \tilde{L}} + \frac{\mu_{max} \tilde{X} \tilde{L} \dot{X}_{j+1}}{(K_L + \tilde{L})(K_x + \tilde{X})} - \\ - \frac{f_{max} (\tilde{P} \dot{X}_{j+1} + \tilde{X} \dot{P}_{j+1})}{f_{max} \tilde{X} \tilde{P} \dot{L}_{j+1}} - \frac{g(K_x + \tilde{X})}{g(K_x + \tilde{X})(K_L + \tilde{L})}, \\ \frac{P_{j+1} - P_j}{\tau} = \frac{f_{max} (\tilde{P} \dot{X}_{j+1} + \tilde{X} \dot{P}_{j+1})}{K_x + \tilde{X}} \end{array} \right. \quad (4)$$

и применяется метод гармоник. В результате проведенных исследований получается условие, которое не обеспечивает устойчивость схемы (4) при численной реализации данного метода. Поэтому проверка на устойчивость осуществляется с помощью численного эксперимента с шагами τ и $\tau/2$. Численные расчеты представляются в виде двух графиков на рис.2. Анализ графиков показывает, что результаты, полученные с шагами τ и $\tau/2$, совпадают. Это означает, что схема устойчива. Для исследования погрешности аппрок-

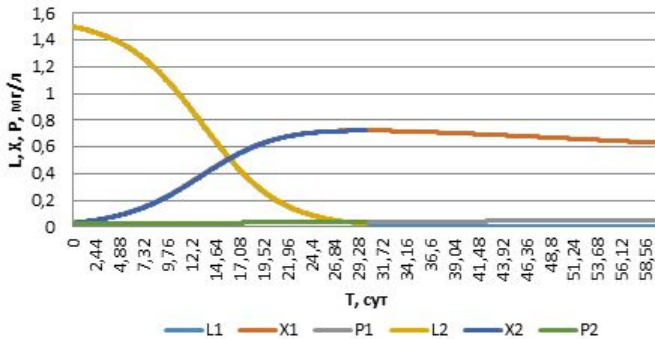


Рис. 2. Численные расчеты по модели Кенейла с шагами τ и $\frac{\tau}{2}$

симации составляют функции погрешности для соответствующих уравнений разностной схемы (2). Пусть $\psi_1(t_{j+1})$ - функция погрешности для первого уравнения, $\psi_2(t_{j+1})$, $\psi_3(t_{j+1})$ - для второго и

третьего соответственно:

$$\begin{cases} \psi_1(t_{j+1}) = \frac{L_{j+1} - L_j}{\tau} + \frac{1}{Y} \frac{\mu_{max} X_{j+1} L_{j+1}}{K_L + L_{j+1}}, \\ \psi_2(t_{j+1}) = \frac{X_{j+1} - X_j}{\tau} - \frac{\mu_{max} X_{j+1} L_{j+1}}{K_L + L_{j+1}} + \frac{f_{max} X_{j+1} P_{j+1}}{g(K_x + X_{j+1})}, \\ \psi_3(t_{j+1}) = \frac{P_{j+1} - P_j}{\tau} - \frac{f_{max} X_{j+1} P_{j+1}}{K_x + X_{j+1}}. \end{cases} \quad (5)$$

Для оценки порядка погрешности аппроксимации предполагается, что $L, X, P \in C^2[0, T]$ и функции L, X и P из (5) разлагаются в ряд Тейлора в окрестности узла t_{j+1} :

$$\begin{cases} \psi_1(t_{j+1}) = \left(L_{j+1} - L_{j+1} + \frac{dL(t_{j+1})}{dt} \tau - \frac{d^2 L(\tilde{t})}{dt^2} \frac{\tau^2}{2} \right) \frac{1}{\tau} + \\ \quad + \frac{1}{Y} \frac{\mu_{max} X_{j+1} L_{j+1}}{K_L + L_{j+1}}, \\ \psi_2(t_{j+1}) = \left(X_{j+1} - X_{j+1} + \frac{dX(t_{j+1})}{dt} \tau - \frac{d^2 X(\tilde{t})}{dt^2} \frac{\tau^2}{2} \right) \frac{1}{\tau} - \\ \quad - \frac{\mu_{max} X_{j+1} L_{j+1}}{K_L + L_{j+1}} + \frac{f_{max} X_{j+1} P_{j+1}}{g(K_x + X_{j+1})}, \\ \psi_3(t_{j+1}) = \left(P_{j+1} - P_{j+1} + \frac{dP(t_{j+1})}{dt} \tau - \frac{d^2 P(\tilde{t})}{dt^2} \frac{\tau^2}{2} \right) \frac{1}{\tau} - \\ \quad - \frac{f_{max} X_{j+1} P_{j+1}}{K_x + X_{j+1}}, \end{cases} \quad (6)$$

где $\tilde{t}, \tilde{t}, \tilde{t} \in (t_j, t_{j+1})$.

Таким образом получается, что

$$\psi_1(t_{j+1}) = -\frac{\tau}{2} \frac{d^2 L(\tilde{t})}{dt^2}, \psi_2(t_{j+1}) = -\frac{\tau}{2} \frac{d^2 X(\tilde{t})}{dt^2}, \psi_3(t_{j+1}) = -\frac{\tau}{2} \frac{d^2 P(\tilde{t})}{dt^2}. \quad (7)$$

Для начальных условий функции погрешности запишутся:

$$\psi_4(t_0) = 0, \psi_5(t_0) = 0, \psi_6(t_0) = 0. \quad (8)$$

Вектор невязки имеет вид:

$$\bar{\delta} f = \left(-\frac{\tau}{2} \frac{d^2 L(\tilde{t})}{dt^2}, -\frac{\tau}{2} \frac{d^2 X(\tilde{t})}{dt^2}, -\frac{\tau}{2} \frac{d^2 P(\tilde{t})}{dt^2}, 0, 0, 0 \right)^T. \quad (9)$$

Норма вектора невязки определяется следующим образом:

$$\|\bar{\delta} f\| = \max (\|\delta_1 f\|, \|\delta_2 f\|, \|\delta_3 f\|, \|\delta_4 f\|, \|\delta_5 f\|, \|\delta_6 f\|). \quad (10)$$

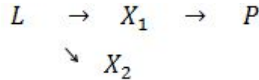
где

$$\begin{aligned} \|\delta_1 f\| &= \max_{t \in \omega_\tau} \left| -\frac{\tau}{2} \frac{d^2 L(t)}{dt^2} \right| = \tau C_1, & C_1 &= \frac{1}{2} \max_{t \in \omega_\tau} \left| \frac{d^2 L(t)}{dt^2} \right|, \\ \|\delta_2 f\| &= \max_{t \in \omega_\tau} \left| -\frac{\tau}{2} \frac{d^2 X(t)}{dt^2} \right| = \tau C_2, & C_2 &= \frac{1}{2} \max_{t \in \omega_\tau} \left| \frac{d^2 X(t)}{dt^2} \right|, \\ \|\delta_3 f\| &= \max_{t \in \omega_\tau} \left| -\frac{\tau}{2} \frac{d^2 P(t)}{dt^2} \right| = \tau C_3, & C_3 &= \frac{1}{2} \max_{t \in \omega_\tau} \left| \frac{d^2 P(t)}{dt^2} \right|, \\ & & & \|\delta_4 f\| = \|\delta_5 f\| = \|\delta_6 f\| = 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $\|\bar{\delta} f\| \leq \tau C$, где $C = \max(C_1, C_2, C_3)$ и погрешность аппроксимации имеет первый порядок относительно τ . Из теоремы Лакса [3] следует, что решение разностной задачи (2) сходится к решению дифференциальной (1).

Об одной модификации модели Кенейла

Модель Кенейла (1) используется Кердсом [4] при моделировании более сложных пищевых цепей, включающих несколько видов бактерий и простейших. В данной работе рассматривается следующая пищевая цепочка:



Такая цепь служит примером конкуренции между двумя микроорганизмами за один субстрат. При таком взаимодействии наблюдается явление хищничества между простейшей с одним или несколькими видами бактерий.

Предполагается, что имеется постоянный приток воды (речной водоем) с неизменной концентрацией субстрата в реактор [4], а также отток жидкости, содержащей субстрат, бактерии и простейших из реактора. Считается, что скорость вливания субстрата постоянна, так же, как и скорость вымывания. Объем водоема постоянен и культура, состоящая из субстрата, бактерий и простейших, хорошо размешивается. Кроме того, скорость разбавления остается величиной постоянной и обозначается через D .

Система, описывающая данную пищевую цепь, приводится ни-

же:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = DL_0 - DL - \frac{1}{Y} \frac{\mu_{max1} X_1 L}{K_{L1} + L} - \frac{1}{Y} \frac{\mu_{max2} X_2 L}{K_{L2} + L}, \\ \frac{dX_1}{dt} = \frac{\mu_{max1} X_1 L}{K_{L1} + L} - DX_1 - \frac{f_{max} X_1 P}{g(K_x + X_1)}, \\ \frac{dX_2}{dt} = \frac{\mu_{max2} X_2 L}{K_{L2} + L} - DX_2, \\ \frac{dP}{dt} = -DP + \frac{f_{max} X_1 P}{K_x + X_1}, \\ L(0) = L^0, X_1(0) = X_1^0, X_2(0) = X_2^0, P(0) = P^0, \end{cases}, \quad (11)$$

где P - концентрация простейших, L_0 - концентрация субстрата во втекающей среде, D - скорость разбавления. Рассматривается несколько случаев для модели (11) :1. $DL_0 = 0$; 2. $DL_0 \neq 0$.

а) $DL_0 = 0$. При выполнении условия а) не происходит постоянного притока субстрата, что приводит к полному очищению водоема и к быстрому вымыванию всех микроорганизмов. Данная ситуация представлена на рис. 3.

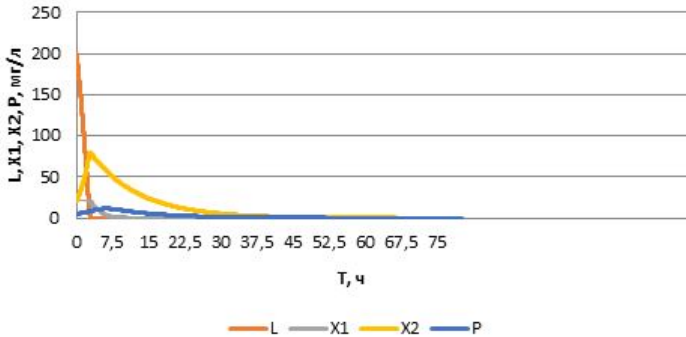


Рис. 3. Удельная скорость роста бактерий

б) $DL_0 \neq 0$.

В этом случае предполагается, что простейшая реснитчатая питается эффективной бактерией (X_1). Максимальная удельная скорость роста реснитчатой предполагается высокой. Получается колебательное движение всех популяций (см. рис. 4) - X_1, X_2, P . При повышении уровня хищничества реснитчатой концентрация эффективной бактерии падает. Это влияет на поведение субстрата: наблюдается рост загрязнения. Происходит конкуренция между двумя бактериями, которая приводит к ступенчатому поведению субстрата. Когда эффективная бактерия доминирует, концентрация суб-

страта становится такой же, как если бы эта бактерия была единственным присутствующим организмом. Аналогично, когда доминирует неэффективный организм, концентрация субстрата приближается к тому, что было бы получено, если бы этот организм рос сам по себе. Когда обе бактерии находятся на низком уровне, концентрация субстрата достигает пика (рис. 4).

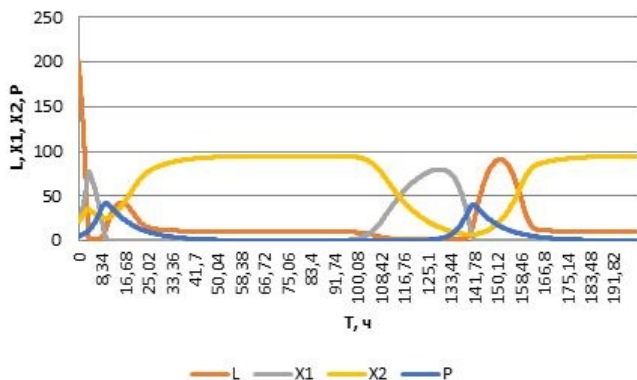


Рис. 4. Удельная скорость роста бактерий

В том случае, когда перекрывается поступление субстрата в реактор в момент времени t , поведение всех популяций изображено на рис.5.

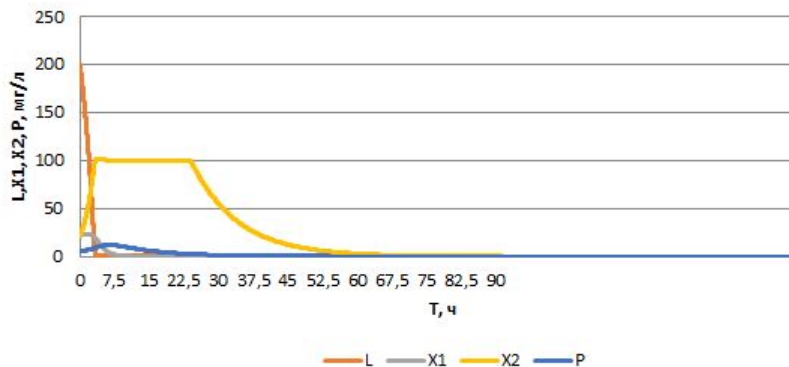


Рис. 5. Удельная скорость роста бактерий

Заключение

В работе рассматриваются модель Кенейла и ее модификация. Математически – это системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с соответствующими начальными условиями. Для реализации моделей используется неявный метод Эйлера. Исследуются вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости данного метода. Результаты численных расчетов представлены в виде графиков, построенных в Excel. Анализ результатов показывает, что в процессе очистки сточных вод значительную роль играет содержание микроорганизмов в водной среде. Усложнение пищевой цепи происходит за счет увеличения числа бактерий и появления нескольких видов простейших. В результате возникает конкуренция и хищничество между микроорганизмами и простейшими. Это важный момент, который стоит учитывать при очистке сточных вод.

Литература

1. Хуторная А.И. Метод биологической очистки сточных вод на примере модели Халдейна // Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики». – 2017. – С. 152–161.
2. Вавилин В.А. Нелинейные модели биологической очистки и процессов самоочищения в реках. – М.:Наука, 1983. – 156 с.
3. Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений: Учебное пособие. – Томск: ТМЛ-Пресс, 2007. – Ч.2. – 288 с.
4. Curds C.R. Computer simulations of some complex microbial food chains // Water Research. – 1974. – Vol.8, №10. – P. 769–780.

Статистическое исследование влияния некоторых факторов на длительность ремиссии у наркозависимых

Вечирко К. В., Емельянова Т. В., Пучнин Д. С.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: vechirkokristina@gmail.com

Аннотация

В работе исследуется статистическая взаимосвязь между длительностью ремиссии у наркозависимых после реабилитации и некоторыми социально - бытовыми факторами, такими как: семейное положение, занятость, наличие хобби, уровень образования, воинская повинность, наличие судимости, а также стаж употребления. Исследования проведены на основе обработки анкет наркозависимых мужчин, обратившихся за помощью в реабилитационный центр "Зелеево". Выявлено, что длительность ремиссии зависит лишь от семейного положения и занятости. В работе освещены основные понятия, связанные с проверкой статистических гипотез, рассмотрен критерий χ^2 для проверки гипотезы независимости признаков. Так же построена первичная модель множественной регрессии и исследована корреляция между переменными в пакете "Microsoft Excel".

Ключевые слова: таблица сопряженности, таблица сопряженных признаков, гипотеза независимости, критерий χ^2 - Пирсона, корреляция, множественная регрессия.

В нашей стране с начала 1990-ых годов начался резкий рост уровня наркомании. Наркомания становится проявлением духовной болезни не только отдельного человека, но и всего общества. Чтобы помочь жертвам наркомании и их семьям специалистам необходимо знать какие факторы влияют на длительность ремиссии больного, на качество его реабилитации. Выявление статистически значимых факторов, влияющих на длительность ремиссии больных наркоманией после реабилитации, является основной целью исследования.

На основе данных, предоставленных из социально – ориентированной автономной некоммерческой организации «Реабилитационный центр «Зелеево»» в исследовании выявляются факторы,

от которых зависит длительность ремиссии или наличие срыва у наркозависимых.

Факторы, влияющие на наличие ремиссии или наличие срыва выявлялись с помощью критерия χ^2 - Пирсона. Данные представлялись в виде таблицы сопряженных признаков.

Статистика данного критерия имеет вид:

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k \frac{1}{\nu_i \cdot \nu_j} (\nu_{ij} - \frac{\nu_i \cdot \nu_j}{n})^2$$

Если верна гипотеза H_0 независимости признаков, то эта статистика имеет распределение χ^2 с числом степеней свободы $(c-1)(k-1)$. Здесь c – число строк в таблице сопряженности, k – число столбцов в таблице сопряженности, ν_{ij} - число наблюдений выборки, попавших в нужный интервал (частота), ν_i - сумма частот по строкам, ν_j - сумма частот по столбцам в таблице сопряженности признаков.

Если $\chi^2 > \chi_{\alpha}^2$, то гипотеза H_0 отвергается, а если $\chi^2 < \chi_{\alpha}^2$, то нет оснований отвергнуть гипотезу H_0 , здесь χ_{α}^2 - критическое значение, соответствующее ошибке первого рода α .

Исследуем наличие зависимости наступления ремиссии или срыва от некоторых социально – бытовых факторов. Сначала рассмотрим влияние семейного положения на длительность ремиссии у наркозависимого.

В анкетировании участвовало 108 человек.

Таблица 1. Результаты данного анкетирования

	есть семья	нет семьи	ИТОГО
срыв	5	17	22
ремиссия	48	38	86
ИТОГО	53	55	108

Рассчитаем эмпирическое значение: $\chi^2=7,68$.

Критическое значение при уровне ошибки первого рода $\alpha=0,05$ $\chi_{\alpha(c-1)(k-1)}^2=3,84$.

$\chi^2 > \chi_{\alpha}^2$, значит гипотезу H_0 следует отвергнуть. Иными словами, следует признать, что семейное положение оказывает существенное влияние на возникновение у наркозависимых срыва (ремиссии). Следующий фактор - воинская повинность.

Таблица 2. Результаты анкетирования

	военнообяз.	невоеннообяз.	ИТОГО
срыв	5	13	18
ремиссия	13	39	52
ИТОГО	18	52	70

Рассчитаем эмпирическое значение: $\chi^2=0,054$.

Критическое значение при уровне первого рода $\alpha=0,05$
 $\chi^2_{\alpha(c-1)(k-1)}=3,84$.

$\chi^2 < \chi^2_{\alpha}$, значит нет оснований отвергнуть гипотезу H_0 . Иными словами, следует признать, что воинская повинность не оказывает существенного влияния на возникновение у наркозависимых срыва (ремиссии). Следующий исследуемый фактор - занятость.

Таблица 3. Результаты анкетирования

	есть работа	нет работы	ИТОГО
срыв	8	10	18
ремиссия	56	6	62
ИТОГО	64	16	80

Рассчитаем эмпирическое значение: $\chi^2=18,35$.

Критическое значение при уровне ошибки первого рода $\alpha=0,05$
 $\chi^2_{\alpha(c-1)(k-1)}=3,84$.

$\chi^2 > \chi^2_{\alpha}$, значит гипотезу H_0 следует отвергнуть. Иными словами, следует признать, что занятость оказывает существенное влияние на возникновение у наркозависимых срыва (ремиссии). Следующий фактор - уровень образования.

Таблица 4. Результаты анкетирования

	школа	средне-спец.	выше средне-спец.	ИТОГО
срыв	7	6	6	19
ремиссия	12	22	14	48
ИТОГО	19	28	20	67

Рассчитаем эмпирическое значение: $\chi^2=1,36$.

Критическое значение при уровне ошибки первого рода $\alpha=0,05$
 $\chi^2_{\alpha(c-1)(k-1)}=5,99$.

$\chi^2 < \chi^2_{\alpha}$, значит нет оснований отвергнуть гипотезу H_0 .

Иными словами, следует признать, что уровень образования не оказывает существенного влияния на возникновение у наркозависимых срыва (ремиссии).

Следующий фактор - стаж употребления наркотических средств.

Здесь исследуем наличие зависимости между стажем употребления наркотических средств и наличием у наркозависимого ремиссии или срыва.

Таблица 5. Результаты анкетирования

	больше 5 лет или 5 лет	меньше 5 лет	ИТОГО
срыв	8	8	16
ремиссия	27	16	43
ИТОГО	35	24	59

Рассчитаем эмпирическое значение: $\chi^2=0,789$.

Критическое значение при уровне ошибки первого рода $\alpha=0,05$
 $\chi^2_{\alpha(c-1)(k-1)}=3,84$.

$\chi^2 < \chi^2_{\alpha}$, значит нет оснований отвергнуть гипотезу H_0 . Иными словами, следует признать, что стаж употребления не оказывает существенного влияния на возникновение у наркозависимых срыва (ремиссии).

Далее исследуем фактор - наличие хобби.

Таблица 6. Результаты анкетирования

	есть хобби	нет хобби	ИТОГО
срыв	13	10	23
ремиссия	30	17	47
ИТОГО	43	27	70

Рассчитаем эмпирическое значение: $\chi^2=1,36$.

Критическое значение при уровне ошибки первого рода $\alpha=0,05$
 $\chi^2_{\alpha(c-1)(k-1)}=3,84$.

$\chi^2 < \chi^2_{\alpha}$, значит нет оснований отвергнуть гипотезу H_0 . Иными словами, следует признать, что наличие хобби существенного влияния не оказывает.

яния на возникновение у наркозависимых срыва (ремиссии).
 Последний исследуемый фактор - наличие судимости.

Таблица 7. Результаты анкетирования

	есть судимость	нет судимости	ИТОГО
срыв	12	8	20
ремиссия	20	30	50
ИТОГО	32	38	70

Рассчитаем эмпирическое значение: $\chi^2=1,75$.

Критическое значение при уровне ошибки первого рода $\alpha=0,05$

$$\chi_{\alpha(c-1)(k-1)}^2=3,84.$$

$\chi^2 < \chi_{\alpha}^2$, значит нет оснований отвергнуть гипотезу H_0 . Иными словами, следует признать, что наличие судимости существенного влияния на возникновение у наркозависимых срыва (ремиссии).

Таким образом, с помощью критерия χ^2 - Пирсона было выявлено, что длительность ремиссии у наркозависимых после реабилитации зависит от таких факторов как: семейное положение (наличие семьи) и занятость (наличие работы).

Такие факторы как воинская повинность, наличие хобби, уровень образования, судимость, а также стаж употребления на длительность ремиссии значимого влияния не оказывают.

Далее следует построение в пакете Microsoft Excel многофакторной модели множественной регрессии длительности ремиссии от тех факторов, которые были исследованы как значимые.

Исследуем степень зависимости между переменными. Для этого построим корреляционную матрицу по исходным данным, используя статистическую подпрограмму «Анализ данных» в пакете Microsoft Excel.

Таблица 8. Корреляционная матрица

	столбец 1	столбец 2	столбец 3
столбец 1	1		
столбец 2	0,0801176677	1	
столбец 3	0,301570444	0,108266392	1

Построим многофакторную регрессионную модель, в которой

зависимая переменная Y – это длительность ремиссии наркозависимого.

Найдем коэффициенты уравнения:

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$$

Полученная многофакторная модель будет иметь вид:

$$Y = 2,8615 + 0,4683X_1 + 1,6925X_2$$

Это уравнение получено методом наименьших квадратов и оно выражает зависимость длительности ремиссии от занятости и семейного положения. Коэффициенты уравнения показывают количественное воздействие каждого фактора на результативный показатель при неизменности других.

Табличное значение критерия Стьюдента, соответствующее доверительной вероятности $\alpha=0,95$ и числу степеней свободы $k=i-j-1=56-4-1=51$

$$t_\alpha = t_{(0,025;51)} = 2,0076$$

Критерий Стьюдента позволяет определить значимость коэффициентов, а именно если расчетная t - статистика по модулю больше табличного значения, то коэффициент значимый.

Таким образом, сравнивая расчетную t – статистику коэффициентов уравнения с табличным значением, заключаем, что значимым является коэффициент уравнения регрессии только при переменной X_2 , а так же свободный член в уравнении регрессии.

Рассчитанный критерий Фишера $F= 2,776$, а табличный критерий Фишера $F = 3,1682$. Рассчитанное значение меньше табличного - это говорит о незначимости полученного уравнения.

Итак, с помощью критерия χ^2 - Пирсона было выявлено, что длительность ремиссии у наркозависимых после реабилитации зависит от таких факторов как: семейное положение (наличие семьи) и занятость (наличие работы). Такие факторы как воинская повинность, наличие хобби, уровень образования, наличие судимости, а так же стаж употребления на длительность ремиссии значимого влияния не оказывают.

Так же была построена первичная модель множественной регрессии, уровень значимости которой оказался очень малым и исследована степень зависимости между переменными в пакете Microsoft Excel.

Литература

1. Ивченко Г.И. Математическая статистика: учебное пособие для вузов / Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. – М.: Высшая школа, 1992. – 304 с.
2. Крамер Г. Математические методы статистики: пер. с англ. / Г. Крамер; под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
3. Аптон Г. Анализ таблиц сопряженности / Г. Аптон; пер. с англ. Ю.П. Адлера. М. : Финансы и статистика, 1982. – 143 с.
4. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ / Андерсон Т. ; пер. с англ. Ю. Ф. Кичатова, Е. С. Кочеткова, Н. С. Райбмана; под ред. Б. В. Гнеденко. М. : Государственное издательство физико – математической литературы, 1963. – 500 с.
5. Кендал М. Статистические выводы и связи / М. Кендал, А. Стьюарт ; пер. с англ. Л.И. Гальчука, А.Т. Терехина; под ред. А.Н. Колмогорова. М. : Наука, 1973. – 900 с.

Обнаружение "разладки" в параметрах линейной модели

Клемешова А. И., Емельянова Т. В.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: anya-3.4@mail.ru

Аннотация

В работе рассмотрены два различных алгоритма обнаружения "разладки" в модели авторегрессии первого порядка и в моделях, описывающих появление сигнала на фоне независимых и зависимых шумов авторегрессионного типа. Симмуляционное моделирование показало, что при достаточной разнице ($|\phi_0 - \phi_1| \geq 0,3$ и $|\delta_0 - \delta_1| \geq 0,3$) в коэффициентах авторегрессионной модели лучшие результаты показывает алгоритм, основанный на отношении правдоподобия. Алгоритм CuSum применим для более широкого класса моделей. При незначительной разнице в параметрах ($|\phi_0 - \phi_1| < 0,3$ и $|\delta_0 - \delta_1| < 0,3$) он приводит к более качественному обнаружению "разладки" при хорошем подборе коэффициентов α и β , где α - вероятность ложной тревоги, а β - вероятность ложного спокойствия.

Ключевые слова: "разладка", момент остановки, ложная тревога, ложное спокойствие.

I. Критерий обнаружения "разладки", основанный на отношении правдоподобия

Рассмотрим авторегрессионную модель первого порядка:

$$X_t = \delta + \phi \cdot X_{t-1} + \omega_t; \quad t = 1, 2, 3... \quad (1)$$

где X_t - наблюдаемый процесс; δ , ϕ - параметры модели; ω_t - н.о.р.с.в. ($E\omega_t = 0$ и $E\omega_t^2 = \sigma^2$).

"Разладка" в приведенной модели понимается как изменение коэффициента δ , либо как изменение коэффициента ϕ . Если проверяем гипотезу об изменении коэффициента δ , то считаем при этом, что ϕ фиксировано. Если проверяем гипотезу об изменении коэффициента ϕ , то δ считаем фиксированным.

Введем гипотезы для обнаружения "разладки" в первом и втором коэффициенте соответственно:

$$H_0 : \quad X_t = \delta + \phi \cdot X_{t-1} + \omega_t; \quad t = 1, 2, 3...$$

$$H_1 : \exists k \quad X_t = \begin{cases} \delta_0 + \phi \cdot X_{t-1} + \omega_t, & t \leq k \\ \delta_1 + \phi \cdot X_{t-1} + \omega_t, & t > k \end{cases}; \quad (2)$$

где $\delta_0 \neq \delta_1$ и k - момент времени, когда происходит изменение.

$$H_0 : \quad X_t = \phi \cdot X_{t-1} + \omega_t; \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

$$H_1 : \exists k \quad X_t = \begin{cases} \phi_0 \cdot X_{t-1} + \omega_t, & t \leq k \\ \phi_1 \cdot X_{t-1} + \omega_t, & t > k \end{cases}; \quad (3)$$

где $\phi_0 \neq \phi_1$ и k - момент времени, когда происходит изменение.

Построим критерий для проверки основной гипотезы об отсутствии "разладки" против альтернативы о ее наличии.

Отношение правдоподобия имеет вид:

$$\lambda_k = \frac{L_0(\hat{\sigma}_n^2, \hat{\phi}, \hat{\delta})}{L_1(\hat{\sigma}_k^2, \hat{\phi}, \hat{\delta}_0, \hat{\delta}_1)} = \left(\frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{\sigma}_n^2} \right)^{-\frac{n-1}{2}}$$

где L_0 - функция плотности для $\{X_2, X_3, \dots, X_n\}$, если верна гипотеза H_0 ; L_1 - функция плотности для $\{X_2, X_3, \dots, X_n\}$, если верна гипотеза H_1 ; $\hat{\sigma}_n^2$ и $\hat{\sigma}_k^2$ - оценки, полученные по методу максимального правдоподобия.

Его логарифм имеет вид:

$$\Lambda_k = -2 \cdot \log \lambda_k \quad (4)$$

Статистика критерия выражается формулой:

$$\Lambda_n = \max_{2 \leq k \leq n-1} | -2 \cdot \log \lambda_k | \quad (5)$$

Если нулевая гипотеза отвергается, значит происходит изменение параметров в момент времени k ("разладка"). Тогда $\hat{\sigma}_n^2$ будет больше, чем $\hat{\sigma}_k^2$. Значит λ_k мало, следовательно Λ_k большое. В результате гипотеза H_0 отклоняется, если $|\Lambda_k|$ слишком велик. Момент времени k , когда Λ_k принимает наибольшее значение - момент "разладки".

Было проведено численное исследование, соответствующее критерию процедуры обнаружения "разладки", которое дало следующие результаты: при большой разнице в коэффициентах "разладка" диагностируется достаточно точно.

Характерный пример реализации показан на рисунке 3. Моделировался процесс:

$$X_t = \begin{cases} -0.5 + 0.8 \cdot X_{t-1} + \omega_t, & t \leq 1500 \\ -0.8 + 0.8 \cdot X_{t-1} + \omega_t, & t > 1500 \end{cases};$$

Статистика критерия: $\Lambda_k = 29.692$.

При разнице меньше 0,3 разладка диагностируется менее точно. Характерный пример реализации можно увидеть на рисунке 2.

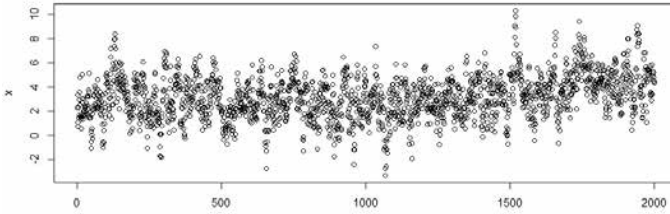


Рис. 1. Диагностируемый момент "разладки" $t_k = 1504$.

Моделировался процесс:

$$X_t = \begin{cases} -0.5 + 0.8 \cdot X_{t-1} + \omega_t, & t \leq 1500 \\ -0.6 + 0.8 \cdot X_{t-1} + \omega_t, & t > 1500 \end{cases} ;$$

Статистика критерия: $\Lambda_k = 5.635$.

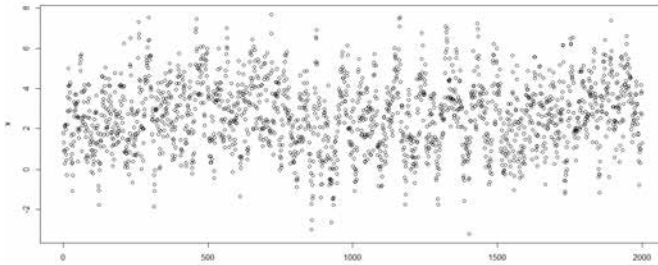


Рис. 2. Диагностируемый момент "разладки" $t_k = 1741$.

Численное моделирование в случае "разладки" во втором коэффициенте показало аналогичные результаты.

На рисунке 3 представлена реализация процесса:

$$X_t = \begin{cases} 0.4 \cdot X_{t-1} + \omega_t, & t \leq 1000 \\ 0.5 \cdot X_{t-1} + \omega_t, & t > 1000 \end{cases} ;$$

Статистика критерия: $\Lambda_k = 5.748$.

II. Последовательный непараметрический метод CuSum обнаружения "разладок" случайных процессов рекуррентного типа

Пусть наблюдается многомерный случайный процесс

$$x(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}^T,$$

который описывается системой стохастических разностных уравнений

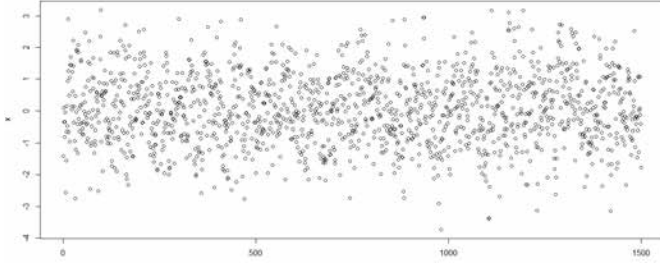


Рис. 3. Диагностируемый момент "разладки" $t_k = 868$.

$$x(t+1) = A_1(t, x) + B_1(t, x) \cdot \xi(t+1), \quad t = 0, 1, \dots, \theta - 1, \quad (6)$$

до момента "разладки" θ и системой уравнений

$$x(t+1) = A_2(t, x) + B_2(t, x) \cdot \xi(t+1), \quad t = \theta, \theta + 1, \dots, \quad (7)$$

начиная с момента θ . Здесь $\{\xi(t)\}$ - не зависящая от $x(0)$ последовательность s -мерных одинаково распределенных случайных векторов с $E\xi(t) = 0$ и $E\xi(t) \cdot \xi(t)^T = E$; E - единичная матрица.

Проведем численное исследование алгоритма, представленного в [1] на моделях двух типов.

Модель 1: появление детерминированного сигнала на фоне независимых шумов

$$x_t = \begin{cases} \xi_t, & t < \theta \\ \sin(t) + \xi_t, & t \geq \theta \end{cases} \quad ; \quad \xi_t \sim N(0, 1) \quad (8)$$

Построение процедуры начнем с построения возрастающей последовательности моментов остановки:

$$\tau_0 = 0; \quad \tau_{k+1} = \inf\{n \geq \tau_k : \sum_{t=\tau_k+1}^n \sin^2(t) \geq H\},$$

Далее строим статистику $Y_i(H)$:

$$Y_i = \frac{2}{H} \cdot \sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i} \alpha(t) \sin(t) \left[x_t - \frac{\sin(t)}{2} \right];$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1, & \tau_{i-1} + 1 \leq t \leq \tau_i \\ \frac{H - \sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i-1} \sin^2(t)}{\sin^2(\tau_i)}, & t = \tau_i \end{cases} \quad ; \quad (9)$$

Момент "разладки" определяем по правилу :

$$N_{cs} = \inf\{n \geq 0 : \max_{0 \leq k \leq n} \sum_{i=k}^n Y_i \geq \delta\}$$

На рисунке 4 представлена реализация процесса (8).

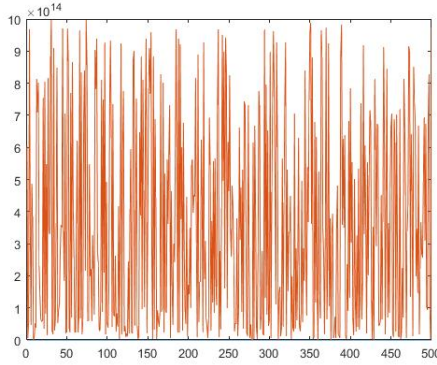


Рис. 4. Объем наблюдений 500; точный момент "разладки" $t = 100$.

В таблице 1 приведены диагностируемые моменты "разладки" при различных значениях параметров α и β для истинного момента "разладки" $\theta = 100$

Таблица 1. Коэффициенты α и β для $\theta = 100$

α	β	момент разладки
0,1	0,3	99
0,2	0,3	100
0,2	0,6	99
0,3	0,6	102
0,4	0,9	102
0,5	0,7	102
0,5	0,9	100
0,6	0,7	100
0,6	0,8	99
0,8	0,9	102

Модель 2: появление детерминированного сигнала на фоне зависимых шумов

$$x_t = \begin{cases} \xi_t, & t < \theta \\ \frac{1}{\ln(t+10)} + \xi_t, & t \geq \theta \end{cases} ; \quad \xi_t = \delta \cdot \xi_{t-1} + \varepsilon_t; \quad (10)$$

$$\xi_t \sim N(0, 1); \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1)$$

Начнем построение процедуры с построения последовательности моментов:

$$r(t) = \frac{1}{\ln(t+10)}$$

$$\tau_0 = 0; \quad \tau_{k+1} = \inf\{n \geq \tau_k : \sum_{t=\tau_k}^n r^2(t) \geq H\};$$

Далее строим статистику $Y_i(H)$:

$$Y_i = \frac{2}{H} \cdot \sum_{t=\tau_{i-1}}^{\tau_i} \alpha(t)r(t) \left[x_t - \frac{r(t)}{2} \right];$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1, & \tau_{i-1} + 1 \leq t \leq \tau_i \\ \frac{H - \sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i-1} r^2(t)}{r^2(\tau_i)}, & t = \tau_i \end{cases}; \quad (11)$$

Момент разладки определяем по правилу :

$$N_{cs} = \inf\{n \geq 0 : \max_{0 \leq k \leq n} \sum_{i=k}^n Y_i \geq \delta\}$$

На рисунке 5 приведена реализация траекторий процесса (10). В таблице 2 приведены диагностируемые моменты "разладки" при различных значениях параметров α и β для истинного момента "разладки" $\theta = 100$

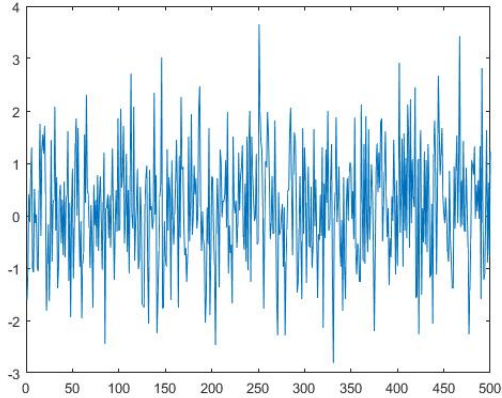


Рис. 5. Объем наблюдений 500; точный момент "разладки" $t = 100$.

Таблица 2. Коэффициенты α и β для $\theta = 100$

α	β	момент разладки
0,4	0,7	117
0,4	0,8	107
0,4	0,9	100
0,5	0,7	97
0,5	0,8	88
0,6	0,7	83

Таким образом, численное исследование двух алгоритмов показало преимущество алгоритма CuSum, особенно в тех случаях, когда "разладка" в коэффициентах незначительна, а также при обнаружении детерминированного сигнала на фоне как зависимых, так и независимых шумов.

Литература

1. Конев В.В. Последовательные оценки параметров стохастических динамических систем. – Томск: Томский университет, 1985. С. 134–151.
2. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.:Мир, 1975. С. 533 п.3.
3. Fang Yuan. Tests for Change-Point of the AR(1) Model/ Fang Yuan, Kang Ling James – The UNIVERSITY OF MINNESOTA, 2013, P. 5–21.

Адаптивное оценивание функции регрессии по неполным данным с шумами импульсного типа^{*}

Повзун М. А., Пчелинцев Е. А.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: povzunyasha@gmail.com

Аннотация

Рассматривается задача оценивания непараметрической функции в регрессионной модели непрерывным временем, с шумами, описываемыми процессом Леви, по наблюдениям в дискретные моменты времени. Предлагаются улучшенные оценки, превосходящие по среднеквадратической точности оценки по методу наименьших квадратов. Получены явные формулы для минимального выигрыша в среднеквадратическом риске. Установлена эффективность оценок в смысле робастного риска.

Ключевые слова: регрессионная модель, процесс Леви, улучшенное оценивание, среднеквадратический риск.

Введение. При обработке сигналов или анализе экономических показателей часто используются модели, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями. При этом, шум в уравнениях может включать в себя импульсные помехи. Как следствие, эффективность идентификации такого рода моделей снижается, поэтому изучают дополнительные свойств апроцедур.

В данной работе рассматривается метод оценивания непараметрической функции в непрерывном времени с шумами, описываемыми процессом Леви [4]. При фиксированных моментах шумовой процесс является условно-гауссовским. Классический метод наименьших квадратов (МНК) является одним из основных методов в теории идентификации модели. Это известный факт, что по теореме Гаусса–Маркова, оценки МНК являются наилучшими по среднеквадратической точности в классе несмещенных оценок. При разработке улучшенных оценок, У. Джеймс и Ч. Стейн отказались от

^{*}Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ , проект № 2.3208.2017 / 4.6 .

такого свойства, как несмещенность, и получили улучшенную оценку для среднего значения многомерного нормального распределения [6].

Постановка задачи. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ наблюдения описываются уравнением с непрерывным временем:

$$dy_t = S(t)dt + d\xi_t, \quad 0 \leq t \leq n, \quad (1)$$

где $S(\cdot)$ — неизвестная 1-периодическая функция, из $\mathcal{L}_2[0, n]$. Шум $(\xi_t)_{0 \leq t \leq n}$ задан процессом Леви:

$$\xi_t = \varrho_1 w_t + \varrho_2 z_t \quad \text{и} \quad z_t = x * (\mu - \tilde{\mu})_t, \quad (2)$$

где ϱ_1 и ϱ_2 некоторые постоянные, $(w_t)_{t \geq 0}$ — винеровский процесс, z_t — общий процесс скачков [1].

В дальнейшем мы будем обозначать через Q распределение процесса $(\xi_t)_{0 \leq t \leq n}$ в пространстве Скорохода $\mathbf{D}[0, n]$ и через Q_n^* обозначим все эти распределения, для которых параметры ϱ_1 и ϱ_2 удовлетворяют условиям:

$$0 < \underline{\varrho} \leq \varrho_1^2 \quad \text{и} \quad \sigma_Q = \varrho_1^2 + \varrho_2^2 \leq \zeta^*, \quad (3)$$

где границы $\underline{\varrho}$ и ζ^* являются функциями от n , т. е. $\underline{\varrho} = \underline{\varrho}_n$ и $\zeta^* = \zeta_n^*$ такими, что для любого $\delta > 0$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^\delta \underline{\varrho}_n > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\delta} \zeta_n^* = 0. \quad (4)$$

Задача — оценить функцию S по дискретным наблюдениям $(y_{t_k})_{0 \leq k \leq np}$ с частотой p (т. е. нам даны данные от 0 до n , и в каждом единичном отрезке доступны наблюдению только p значений процесса $(y_t)_{0 \leq t \leq n}$).

Основной результат. Пусть $(\phi_j)_{j \geq 1}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{L}_2[0, 1]$.

В₁) Пусть базис равномерно ограничен сверху, то есть существует $\phi_* > 0$ такая, что

$$\sup_{1 \leq j \leq n} \sup_{0 \leq t \leq 1} |\phi_j(t)| \leq \phi_* < \infty. \quad (5)$$

Примером такого базиса является тригонометрический базис вида:
 $\text{Tr}_1 \equiv 1$ и для $j \geq 2$

$$\text{Tr}_j(x) = \sqrt{2} \begin{cases} \cos(2\pi[j/2]x) & \text{для четных } j; \\ \sin(2\pi[j/2]x) & \text{для нечетных } j \end{cases}$$

Функцию S можем представить в виде ряда Фурье $S(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \phi_j(t)$, коэффициенты которого определяются следующим образом:

$$\theta_j = (S, \phi_j) = \int_0^1 S(t) \phi_j(t) dt. \quad (6)$$

Оценка МНК для θ_j по дискретным данным зависит от частоты наблюдений p и имеет вид:

$$\hat{\theta}_{j,p} = \frac{1}{n} \int_0^n \psi_{j,p}(t) dy_t, \quad (7)$$

где $\psi_{j,p}(t) = \sum_{k=1}^{np} \phi_j(t_k) \mathbf{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(t)$, или с учетом представления $\psi_{j,p}$

$$\hat{\theta}_{j,p}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{np} \phi_j(t) \Delta y_{t_k}.$$

Используя уравнение (1), можно записать, что

$$\hat{\theta}_{j,p} = \bar{\theta}_{j,p} + \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{j,p}(n) \quad \text{и} \quad \xi_{j,p}(n) = \frac{I_n(\psi_{j,p})}{\sqrt{n}},$$

$$\bar{\theta}_{j,p} = \theta_{j,p} + h_{j,p}(S),$$

где

$$h_{j,p}(S) = \sum_{k=1}^p \int_{t_{k-1}}^{t_k} (S(t) - S(t_k)) \varphi_j(t_k) dt. \quad (8)$$

$I_n(f)$ — функционал вида:

$$I_n(f) = \int_0^n f_t d\xi_t \quad (9)$$

В работе Конева В.В и Пергаменщикова С.М. [2] введен класс

взвешанных оценок наименьших квадратов для $S(t)$:

$$\widehat{S}_\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda(j) \widehat{\theta}_{j,p} \phi_j, \quad (10)$$

где $\lambda = (\lambda(j))_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n$ веса принадлежат конечному множеству Λ из $[0, 1]^n$:

$$\nu = \text{card}(\Lambda) \quad \text{и} \quad |\Lambda|_* = \max_{\lambda \in \Lambda} \sum_{j=1}^{np} \lambda(j),$$

где $\text{card}(\Lambda)$ мощность множества Λ . Пусть все векторы из Λ удовлетворяют следующему условию:

В₂) Предположим, что для любого вектора $\lambda \in \Lambda$ существует целое число $d = d(\lambda)$ такое, что первые d компонент равны единице, т.е. $\lambda(j) = 1, 1 \leq j \leq d$ для любого $\lambda \in \Lambda$.

Замечание 1. Отметим, что весовые коэффициенты, удовлетворяющие данному условию были введены еще в 1985 году, чтобы построить эффективную оценку для непараметрических регрессионной модели с дискретным временем. [3]

Предложение 1. Для любого $n \geq 1$ случайный вектор $\widetilde{\zeta}_{d,n} = (\zeta_{j,n})_{1 \leq j \leq d}$ является условно-гауссовским относительно σ -алгебры $\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_n = \sigma\{z_t, 0 \leq t \leq n\}$ в \mathbb{R}^d , с неизвестным вектором средних значений $h_p(S) = (h_{1,p}(S), \dots, h_{d,p}(S))$ и неизвестной условно-ковариационной матрицей:

$$V_p(\mathcal{G}_n) := \text{cov}(\xi_p(n), \xi_p(n)' | \mathcal{G}_n),$$

такой что

$$\inf_{Q \in \mathcal{Q}_n^*} (\text{tr} V_p(\mathcal{G}_n) - \lambda_{\max}(V_p(\mathcal{G}_n))) \geq (d-1)\underline{g},$$

где $\lambda_{\max}(A)$ - максимальное собственное значение матрицы A .

Для первых d коэффициентов Фурье используем улучшенную оценку. Мы определим сжимающую оценку:

$$\theta_{j,p}^* = (1 - g(j)) \widehat{\theta}_{j,p} \quad \text{и} \quad g(j) = \frac{\mathbf{c}_n}{|\widetilde{\theta}_n|_d} \mathbf{1}_{\{1 \leq j \leq d\}}, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{c}_n = \frac{(d-1)\underline{g}}{\left(r_n^* + \sqrt{d\zeta^*/n}\right) n}.$$

Положительный параметр r_n^* такой, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^* = \infty \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n^*}{n^{\check{\delta}}} = 0, \quad (12)$$

для любого $\check{\delta} > 0$. Тогда оценку для S определим следующим образом

$$S_\lambda^* = \sum_{j=1}^n \lambda(j) \theta_{j,n}^* \phi_j. \quad (13)$$

Для анализа качества оценивания в работе используется квадратический риск, который определяется следующим образом:

$$\mathcal{R}_Q(\hat{S}_n, S) := \mathbf{E}_Q \|\hat{S}_n - S\|^2 \quad \text{and} \quad \|S\|^2 = \int_0^1 S^2(t) dt. \quad (14)$$

Положим разность рисков оценок (10) и (13):

$$\Delta_Q(S) := \mathcal{R}_Q(S_\lambda^*, S) - \mathcal{R}_Q(\hat{S}_\lambda, S).$$

Доказан следующий результат.

Теорема 1. Пусть наблюдаемый процесс $(y_t)_{0 \leq t \leq n}$ описывается уравнениями (1)–(2). Тогда для любого $n \geq 1$

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}_n^*} \sup_{\|S\| \leq r_n^*} \Delta_Q(S) \leq -\mathbf{c}_n^2 + \frac{4\phi_* \beta d}{\sqrt{3}p} \mathbf{c}_n. \quad (15)$$

Следствие 1. В условиях теоремы 1, при $p > 4\phi_* \beta d / (\sqrt{3}\mathbf{c}_n)$, разность рисков обладает следующим свойством:

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}_n^*} \sup_{\|S\| \leq r_n^*} \Delta_Q(S) \leq 0.$$

Процедура выбора модели. Процедура выбора модели для оценивания функции S основывается на улучшенных взвешанных оценках МНК и находится с помощью метода оракульного неравенства. Точность любой оценки измеряется эмпирической квадратической ошибкой:

$$\text{Err}_n(\lambda) = \sum_{j=1}^n \lambda^2(j) (\theta_{j,n}^*)^2 - 2 \sum_{j=1}^n \lambda(j) \theta_{j,n}^* b_j + \|S\|^2. \quad (16)$$

Так как коэффициенты b_j неизвестны, то невозможно определить весовые коэффициенты. Для этого коэффициенты Фурье заменяем их оценками и добавляем штраф, который имеет смысл "платы" за замену истинного значения на оценки.

Определим платежную функцию следующим образом:

$$J_n(\lambda) = \sum_{j=1}^n \lambda^2(j)(\theta_{j,n}^*)^2 - 2 \sum_{j=1}^n \lambda(j) \tilde{\theta}_{j,n} + \delta \widehat{P}_n(\lambda). \quad (17)$$

Тогда процедура выбора модели строится следующим образом. Выбираем оценку $S_{\lambda^*}^*$, у которой весовые коэффициенты доставляют минимум платежной функции:

$$S^* = S_{\lambda^*}^* \quad \text{и} \quad \lambda^* = \operatorname{argmin}_{\lambda \in \Lambda} J_n(\lambda). \quad (18)$$

Тогда можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 2. Риск (14) оценки (18) для S удовлетворяет следующему оракульному неравенству:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_Q(S_{\lambda^*}^*, S) &\leq \frac{1 + 3\delta}{1 - 3\delta} \min_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{R}_Q(S_{\lambda^*}^*, S) + \frac{\Psi_{Q,n}}{n\delta} \\ &+ \frac{a|\Lambda|_* \mathbf{E}_Q |\widehat{\sigma}_n - \sigma_Q|}{n}. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi_{Q,n}}{n\delta} = 0. \quad (20)$$

Литература

1. Cont R., Tankov P. *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman & Hall, 2004.
2. Konev V. V., Pergamenshchikov S. M. Nonparametric estimation in a semimartingale regression model. Part 1. Oracle Inequalities. *Journal of Mathematics and Mechanics of Tomsk State University* 3 (2009) P. 23–41.
3. Nussbaum M. (1985) Spline smoothing in regression models and asymptotic efficiency in L_2 .- *Ann. Statist.* 13, P. 984–997.
4. Pchelintsev E.A., Pergamenshchikov S.M. Oracle inequalities for the stochastic differential equations // Statistical inference for

stochastic processes.– 2018.– <https://doi.org/10.1007/s11203-018-9180-1>

5. Pchelintsev E.A. Nonasymptotic sharp oracle inequality for the improved model selection procedures for the adaptive nonparametric signal estimation problem // E. A. Pchelintsev, V. A. Pchelintsev, S. M. Pergamenschikov // Communications. Scientific Letters of the University of Zilina.– 2018.– 20(1).– P. 72–76.

6. James W., Stein C. Estimation with quadratic loss // in: Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematics Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley. 1961. V. 1. P. 361–380.

Непараметрический метод сегментации временных рядов

Емельянова Т. В., Шерстобитова А. О.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: annasherstobitova06@gmail.com

Аннотация

Рассматривается проблема разделения временных рядов произвольной природы X_t (стохастических, детерминированных или смешанных) на сегменты, порожденные одним механизмом, а также обнаружения момента смены τ одного механизма генерации другим. На основе параметров ε -сложности рассматривается новая методология сегментации временных рядов, которая не требует каких-либо априорных знаний о механизмах их генерации.

Ключевые слова: модели временных рядов; методология обнаружения смены механизма генерации; моменты «разладки»; обнаружение аномальных наблюдений.

В задачах обработки временных рядов часто встречается ситуация, когда временной ряд порожден различными механизмами генерации, однако у исследователя нет никакой априорной информации об этих механизмах. Для извлечения адекватной информации из массива данных необходима предварительная сегментация ряда на однородные подмассивы данных, без чего нельзя строить математические модели, оценивать параметры и т.д.

Пусть $X = \{x(t)\}_{t=1}^N$ - временной ряд с неизвестными моментами изменения механизма генерации $t_i, i = 2, \dots, k$. Механизмы генерации ряда неизвестны и могут быть стохастическими, детерминированными или смешанными. Отрезки ряда $[t_i, t_{i+1}], t_1 = 1, t_{k+1} = N$, которые генерируются одним и тем же механизмом, называем однородными и предполагаем. Б. С. Дарховским была сформулирована и доказана следующая теорема [1].

Теорема 1. *Для любой функции $x(\cdot)$ из некоторого плотного подмножества множества тотально нетривиальных функций, удовлетворяющих условию Гёльдера и заданных своими n отсчетами на равномерной решетке, любых (достаточно малых) $\kappa > 0, \delta > 0, n \geq n_0(x(\cdot))$ существуют семейство методов аппроксимации F^* , числа $0 < \alpha(n, x(\cdot)) < \beta(n, x(\cdot)) < 1, A(n, x(\cdot)), B(n, x(\cdot)), |B(\cdot)| \geq$*

$c(n, x(\cdot)) > 0$, функции $\rho(S), \varsigma(S)$ и множество $N \subset Q = [\alpha(\cdot), \beta(\cdot)]$, $\mu(N) > \mu(Q) - \delta$, такие, что при аппроксимации методами $F \supseteq F^*$ для $S \in N$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \log \varepsilon &= A + B \log S + \rho(S) \log S + \varsigma(S) \\ \sup_{S \in N} \max(|\rho(S)|, |\varsigma(S)|) &\leq \kappa \end{aligned} \quad (1)$$

Таким образом, связь ε -сложности функции гёльдерова класса, заданной конечным набором своих отсчетов на равномерной решетке, с погрешностью аппроксимации ε характеризуется парой действительных чисел (A, B) , называемые коэффициентами сложности [1].

Выберем окно размера n в соответствии с теоремой и для каждого отрезка ряда $x(t), t \in [jn + 1, (j + 1)n], j = 0, 1, \dots, [\frac{N}{n}]$, будем вычислять коэффициенты сложности $R(j + 1)$. В результате получим новую диагностическую векторную последовательность $\{R(j)\}_{j=1}^{[\frac{N}{n}]}$.

Ключевая идея предлагаемой методологии заключается в гипотезе о том, что на i -м сегменте однородности $[t_i, t_{i+1}]$ временного ряда X для $t_i \leq t, t + n < t_{i+1}$ коэффициенты сложности удовлетворяют соотношению

$$R(j) = R_i + \xi^i(j)$$

где R_i – математическое ожидание последовательности $R(j)$ на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$, а $\xi^i(j)$ – последовательность случайных величин с нулевым математическим ожиданием. Иными словами, гипотеза означает, что средние значения коэффициентов ε -сложности временного ряда остаются постоянными на интервалах его однородности, а изменение механизма генерации ряда в моменты $t_i, i = 2, \dots, k$, приводит к изменению этих средних значений.

Таким образом, если приведенная гипотеза справедлива, задача сегментации временного ряда сводится к задаче обнаружения «разладки» по среднему значению в диагностической векторной последовательности $R(j)$.

Для решения последней задачи предлагается использовать следующее семейство статистик

$$Y(s, \delta) = \left(\frac{(N_1 - s)s}{N_1^2} \right)^\delta \left(\frac{1}{s} \sum_{k=1}^s z(k) - \frac{1}{N_1 - s} \sum_{k=s+1}^{N_1} z(k), \right) \quad (2)$$

где $0 \leq \delta \leq 1, 1 \leq s \leq N_1 - 1, N_1 = [N/n], Z = \{z(k)\}_{k=1}^{N_1}$ – реализация компонент диагностической последовательности R [2].

Проиллюстрируем теорему и методологию сегментации временных рядов Б. С. Дарховского. Для иллюстрации теоремы в качестве семейства F методов аппроксимации использовались кусочно-

полиномиальные функции до 10 порядка включительно. В каждом эксперименте генерировался временной ряд, затем выполнялось разделение полученного временного ряда на «окна» размера n . Каждое «окно» обрабатывалось методом наименьших квадратов и определялись коэффициенты зависимости (1) по значениям $\log \varepsilon, \log S$. Далее выполнялось обнаружение момента изменения механизма генерации («разладки») ряда. При помощи алгоритма, основанного на статистике (2), определялись моменты «разладки».

Рассмотрим результаты вычислительных экспериментов. Пусть x_t – процесс с 3 моментами смены механизма генерации: до первого момента «разладки» x_t – процесс авторегрессии скользящего среднего ARMA(2,1) с параметрами $\phi = (0.003; 0.1), \theta = 0.002, \varepsilon_t$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, $E\varepsilon_t = 0, E\varepsilon_t^2 = 1$, после первого момента «разладки» процесс описывается детерминированным уравнением, после второго момента «разладки» временной ряд снова является процессом авторегрессии скользящего среднего ARMA(2,1) с теми же параметрами, после третьего момента «разладки» временной ряд – независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_t \sim U[0; 1]$.

$$X_t = \begin{cases} \varepsilon_t + \sum_{i=1,2} \phi_i x_{t-i} + \theta \varepsilon_{t-1}, t \leq k_1; \\ x_{t-1}^2 - 2, k_1 < t \leq k_2; \\ \varepsilon_t + \sum_{i=1,2} \phi_i x_{t-i} + \theta \varepsilon_{t-1}, k_2 < t \leq k_3; \\ \xi_t, t > k_3. \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим иллюстрацию теоремы. Здесь ось абсцисс – логарифм количества выброшенных точек в процентах, ось ординат – логарифм погрешности при аппроксимации полученной функции методом из набора F .

Можно заметить, что даже при сравнительно бедном наборе методов аппроксимации F зависимость вида (1) реализуется с хорошей точностью.

Рассмотрим результаты вычислительного эксперимента для модели (3). Временной ряд генерируется 4 различными механизмами генерации и имеет три момента смены механизма генерации $k_1 = 310, k_2 = 620, k_3 = 1201$.

Объем набора данных составляет $N = 1500$ и разделяется на «окна» одинакового размера $n = 100$. «Разладка» детектируется тогда, когда различие в средних диагностической последовательности значимо. Результаты численного моделирования показали,

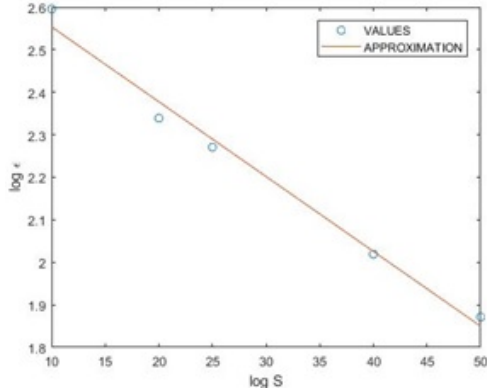


Рис. 1. Иллюстрация теоремы

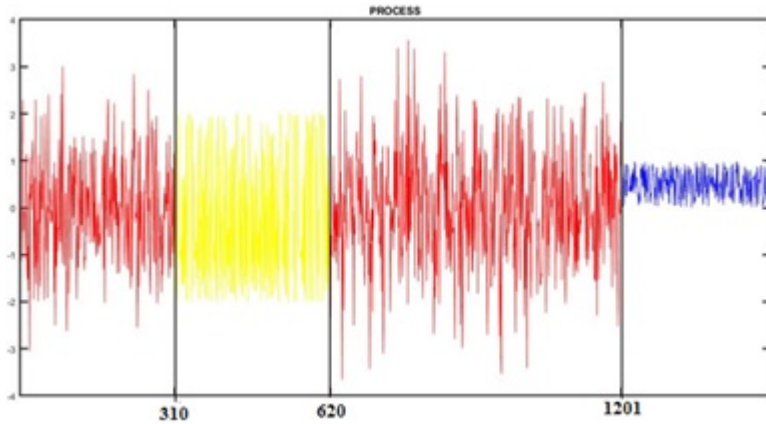


Рис. 2. Иллюстрация реализации модели (3)

что «разладка» детектируется в 3, 6 и 12 окнах, что соответствует интервалам 300-400, 600-700 и 1200-1300 во временном ряде x_t . «Разладка» детектирована верно.

На практике часто необходимо знать номер наблюдения, в котором происходит смена механизма генерации либо фиксируется anomalous поведение данных, не характерное для наблюдаемого временного ряда. В связи с этим предлагается модификация метода сегментации Б. С. Дарховского, которая позволяет получить конкретный номер наблюдения, с зафиксированной аномалией.

Рассмотрим модель ARCH(2) вида

$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i X_{t-i}^2} \quad (4)$$

где $\varepsilon \sim N(0, 1)$, $\alpha = (0.5, 0.3, 0.6)$. Объем выборки для эксперимента выберем равным $N = 1000$, размер окна $n = 100$.

Полученный ряд имеет неравномерное поведение, поэтому в качестве аномалий выбираются скачки, намного превышающие среднее значение ряда.

Будем применять к временному ряду метод сегментации Б. С. Дарховского, в результате чего, получаем окна 2, 3, 5, 6 с возможными аномалиями. Далее будем рассматривать каждое идентифицированное окно в пересечении с соседними следующим образом

$$X_1 = \{x_i \in X : i = nt - 50; n(t + 1) + 50\} \quad (5)$$

где t – идентифицированный номер окна. Таким образом, будем рассматривать четыре полученных временных ряда для обнаружения аномального наблюдения. Для этого необходимо рассматривать каждое наблюдение в новом сгенерированном ряду отдельно и проверять следующие 3 условия

$$X_{1_i} > \overline{X_{1_{i-1}}} + l; X_{1_i} > X_{1_{i-1}} + l; X_{1_i} > X_{1_{i+1}} + l, \quad (6)$$

где l – контролирующий коэффициент.

Таким образом, если наблюдение в окне удовлетворяет 3 условиям в (6), то наблюдение принимается в качестве аномального.

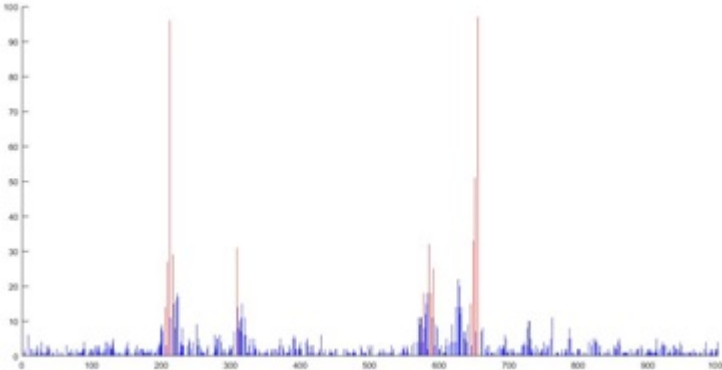


Рис. 3. Обнаружение аномальных наблюдений

На рисунке красным обозначены обнаруженные аномальные на-

блюдения.

Таким образом, алгоритм сегментации Б. С. Дарховского позволяет не только выполнить сегментацию временного ряда на под-массивы, порожденные различными механизмами генерации, но и выполнить обнаружение аномалий во временном ряде.

Литература

1. Дарховский Б.С., Пирытинская А. Новый подход к проблеме сегментации временных рядов произвольной природы, Тр. МИАН, 2014, Т. 287, С. 61–74
2. Brodsky В.Е., Darkhovsky В. S. Non-parametric statistical diagnosis: Problems and methods. Dordrecht: Kluwer, 2000.

Обучение решению стереометрических задач на нахождение угла между двумя прямыми

Казанцева А. И., Гриншпон Я. С.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: tisan91@mail.ru

Аннотация

Работа посвящена методике обучения решению стереометрических задач на нахождение угла между двумя прямыми в пространстве. Данные задачи допускают три метода решения: классический, векторный и координатный. Показано, что все три метода целесообразно изучать параллельно в рамках занятий по подготовке к сдаче ЕГЭ, и при этом необходимо классифицировать задачи по типу рассматриваемого многогранника. Такая форма обучения формирует у учащихся умение оценивать эффективность каждого из методов в зависимости от типа многогранника.

Ключевые слова: стереометрия, угол между прямыми, координатно-векторный метод.

Задачи на нахождение угла между двумя прямыми в пространстве являются одним из важнейшим компонентов стереометрического обучения, так как фактически это первые вычислительные задачи в школьном курсе стереометрии. Именно при решении этих задач к формально-логическому и наглядно-интуитивному пониманию стереометрии, с которым школьники знакомятся на начальной стадии изучения стереометрии, подсоединяется вычислительно-прикладной характер стереометрических знаний.

С другой стороны, возможность простой проверки верности полученного при решении вычислительной задачи числового ответа позволяет эффективно организовать контроль знаний школьников как со стороны учителя, так и самоконтроль со стороны школьника и его родителей. Заинтересованность самих учащихся в результатах такого контроля обусловлена включением вычислительных стереометрических задач в КИМ ЕГЭ профильного уровня по математике.

Однако при подготовке к ЕГЭ выясняется что классический метод решения задач на нахождение углов и расстояний в пространстве вызывают у многих школьников непреодолимые затруднения, вызванные как слабой развитостью пространственного воображения (сложности с выполнением и видением трехмерных чертежей), так и с недостаточно глубоким уровнем осознания логической структуры математического знания (сложности со знанием аксиом, теорем и определений и умением применять их при решении задач).

Поэтому в рамках дополнительных занятий по решению стереометрических задач КИМ ЕГЭ имеет смысл наряду с классическим разбирать координатный метод. По сравнению с классическим, координатный метод является более алгоритмизированным и вычислительным. Освоение этого метода позволяет значительно увеличить число учащихся, берущихся за решение сложной стереометрической задачи (задание 14 КИМ ЕГЭ).

Методически наиболее оправданным здесь видится применение задачного подхода, когда для проблемной ситуации необходимости решения задачи, аналогичная которой может встретиться на экзамене, ищутся различные способы решения. Таким образом, для каждой задачи предполагается разбор как классического, так и координатного метода (также имеет смысл в некоторых ситуациях разбирать векторный метод как промежуточное смысловое звено между классическим и координатным методами). Затем проводится сравнительный анализ с целью поиска слабых и сильных сторон каждого из методов. Возможность сравнения различных методов решения одной и той же задачи развивает творческое мышление учащихся, способствует более осознанному подходу к выбору метода решения.

Для удобства задачи на нахождение угла между двумя прямыми классифицируем в зависимости от рассматриваемых в них многогранников. Получим 6 типов задач: 1) прямоугольный параллелепипед; 2) треугольная призма; 3) шестиугольная призма; 4) треугольная пирамида; 5) четырехугольная пирамида; 6) шестиугольная пирамида. В каждом из этих типов выделим важный подтип правильных призм и пирамид (а в первом типе выделим подтип кубов, как наиболее простых многогранников, с которых лучше всего начинать изучение рассматриваемой темы). Отдельно можно разобрать несколько более нестандартных задач, связанных с телами вращения (цилиндр, конус, шар).

Рассмотрим подробнее каждый из методов. Для нахождения уг-

ла α между прямыми a и b **классическим методом** применяют алгоритм: 1) выбрать прямые $a_1 \parallel a$ и $b_1 \parallel b$ так, чтобы прямые a_1 и b_1 пересекались, и их точка пересечения располагалась удобно относительно чертежа; 2) построить треугольник ABC , где C — это точка пересечения прямых a_1 и b_1 , точки A и B лежат на прямых a_1 и b_1 соответственно; 3) найти длины сторон треугольника ABC ; 4) из теоремы косинусов выразить косинус угла C ; 5) если найденный косинус неотрицателен, то угол C является искомым, если же косинус отрицателен, то искомым является угол, дополняющий угол C до 180° (т.е. $\cos \alpha = |\cos \angle C|$). Иногда угол C можно найти проще, без применения теоремы косинусов, в частности, если треугольник ABC оказался прямоугольным, то угол можно найти, пользуясь определениями тригонометрических функций.

Для нахождения угла между прямыми a и b **координатным методом** применяют алгоритм: 1) поместить рассматриваемые фигуры в прямоугольную систему координат $Oxyz$; 2) выбрать прямые $AB \parallel a$ и $CD \parallel b$ так, чтобы было удобно находить координаты точек A, B, C, D ; 3) найти координаты векторов \vec{AB} и \vec{CD} ; 4) вычислить модули этих векторов и их скалярное произведение; 5) выразить из скалярного произведения косинус угла между векторами; 6) если найденный косинус неотрицателен, то угол между векторами является искомым, если же косинус отрицателен, то искомым является угол, дополняющий угол между векторами до 180° .

Замечание 1. Векторы \vec{AB} и \vec{CD} называют направляющими векторами прямых a и b соответственно.

Замечание 2. Часто координатный метод более кратко записывают в виде формулы

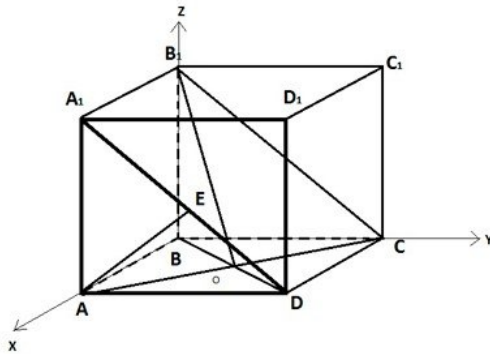
$$\cos \varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

где φ — угол между прямыми, $\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\{x_2; y_2; z_2\}$ — координаты направляющих векторов.

Векторный метод заключается в нахождении косинуса угла между векторами без введения системы координат. Вместо этого используются свойства скалярного произведения.

Приведем примеры решения задачи на угол между прямыми в пространстве.

Задача 1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка O — центр грани $ABCD$. Найдите угол между прямыми $A_1 D$ и $B_1 O$.



Классический метод решения. Обозначим длину ребра куба через a . Проведем прямую B_1C параллельно прямой A_1D . Угол CB_1O будет искомым. По теореме Пифагора для треугольника BB_1O получим $B_1O = \sqrt{BB_1^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$. Косинус искомого угла выразим из теоремы косинусов:

$$\cos \angle CB_1O = \frac{B_1C^2 + B_1O^2 - OC^2}{2B_1C \cdot B_1O} = \frac{2a^2 + \frac{3a^2}{2} - \frac{a^2}{2}}{2a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит, искомый угол составляет 30° .

Замечание 3. При классическом решении этой задачи можно было доказать по теореме о трех перпендикулярах, что $\angle COB_1 = 90^\circ$. Значит, из того факта, что катет CO в два раза меньше гипотенузы CB_1 , сразу следует, что $\angle CB_1O = 30^\circ$.

Замечание 4. То, что величина любого угла в кубе не зависит от длины ребра куба, вытекает из подобия всех кубов друг другу. Поэтому, при решении этой задачи длину ребра можно было задать произвольно, например, можно было считать ее равной единице.

Векторный метод решения. Выразим векторы $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{B_1O}$ через векторы, направленные вдоль ребер куба (эти векторы образуют ортогональный базис трехмерного пространства): $\overrightarrow{B_1O} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{B_1B} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B_1B} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{B_1B} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{A_1D} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD}$.

Пользуясь дистрибутивностью скалярного произведения относительно сложения, преобразуем $\overrightarrow{B_1O} \cdot \overrightarrow{A_1D} = \overrightarrow{B_1B} \cdot \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{B_1B} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{A_1A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{A_1A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}$. Так как скалярное произведение сонаправленных (в частности, равных) векторов рав-

но произведению их модулей, а произведение ортогональных векторов равно нулю, то, обозначив длину ребра куба через a , получим $\overrightarrow{B_1O} \cdot \overrightarrow{A_1D} = \frac{3a^2}{2}$.

Найдем теперь модули векторов: $|\overrightarrow{B_1O}|^2 = \overrightarrow{B_1B}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{B_1B} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B_1B} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{3a^2}{4}$ и $|\overrightarrow{A_1D}|^2 = \overrightarrow{A_1A}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{A_1A} \cdot \overrightarrow{AD} = 2a^2$.

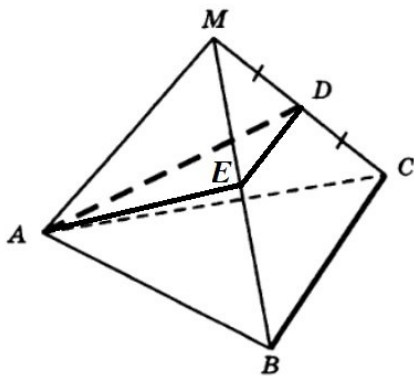
Найдем косинус угла между векторами:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{B_1O}, \overrightarrow{A_1D}}) = \frac{\overrightarrow{B_1O} \cdot \overrightarrow{A_1D}}{|\overrightarrow{B_1O}| \cdot |\overrightarrow{A_1D}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как значение косинуса положительно, то угол между прямыми A_1D и B_1O равен углу между векторами $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{B_1O}$ и равен 30° .

Координатный метод. Поместим куб в прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. Считая ребро куба равным a , найдем координаты искомых точек: $A_1(a; 0; a)$, $D(a; a; 0)$, $B_1(0; 0; a)$, $O(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0)$. Найдем координаты направляющих векторов прямых A_1D и B_1O : $\overrightarrow{A_1D} \{0; a; -a\}$ и $\overrightarrow{B_1O} \{\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; -a\}$. Угол между прямыми находим по формуле: $\cos \varphi = \frac{|\frac{a^2}{2} + a^2|}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\varphi = 30^\circ$.

Задача 2. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ длина бокового ребра AM в три раза больше ребра основания AB . Найдите угол между прямой BC и медианой AD боковой грани AMC .



Классический метод решения. Обозначим длину ребра основания через a . Тогда боковые ребра равны $3a$. Проведем прямую

DE параллельно прямой BC . Угол ADE будет искомым. Так как DE — средняя линия треугольника MBC , то $DE = \frac{a}{2}$. Найдем медианы боковых граней: $AD = AE = \frac{\sqrt{18a^2 + 2a^2 - 9a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{11}}{2}$. Косинус искомого угла выразим из теоремы косинусов:

$$\cos \angle ADE = \frac{\frac{11a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{11a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot a \frac{\sqrt{11}}{2}} = \frac{\sqrt{11}}{22}.$$

Значит, искомый угол равен $\arccos \frac{\sqrt{11}}{22}$.

Замечание 5. Косинус искомого угла можно было найти и по-другому: провести высоту и медиану AH в равнобедренном треугольнике ADE . Тогда $\cos \angle ADE = \frac{\frac{a}{4}}{a \frac{\sqrt{11}}{2}} = \frac{\sqrt{11}}{22}$.

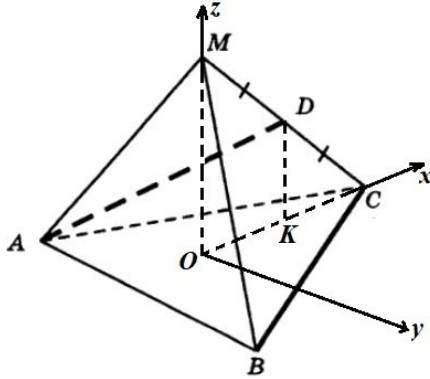
Векторный метод решения. В качестве базисных возьмем векторы, исходящие из вершины основания и направленные вдоль ребер пирамиды, например, \overrightarrow{BA} , \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{BM} . Найдем скалярные произведения базисных векторов: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2 \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$ и $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BM} = 3a^2 \cos \angle ABM = \frac{a^2}{2}$ (воспользовались равнобедренностью треугольника ABM).

Так как $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}$, то $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = -\frac{a^2}{4}$ и $|\overrightarrow{AD}|^2 = \frac{1}{4}\overrightarrow{BM}^2 + \overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{9a^2}{4} + a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{11a^2}{4}$. Следовательно,

$$\cos \left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}} \right) = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = -\frac{\sqrt{11}}{22}.$$

Так как значение косинуса отрицательно, то угол между прямыми AD и BC дополняет угол между векторами \overrightarrow{AD} и \overrightarrow{BC} до 180° , а значит, по формулам приведения косинус угла между прямыми противоположен найденному косинусу, т. е. равен $\frac{\sqrt{11}}{22}$.

Координатный метод решения.



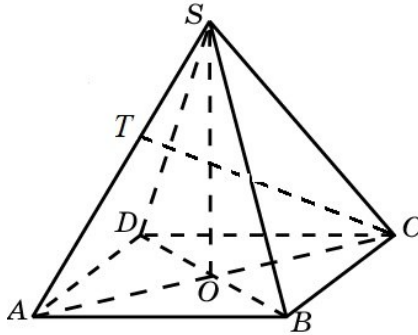
В качестве начала координат выберем точку O — центр основания, ось аппликат направим вдоль высоты пирамиды, ось абсцисс проходит через вершину C , а ось ординат разбивает ребро BC на две равные части. Так как $OC = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $OM = a\sqrt{\frac{26}{3}}$, $DK = a\sqrt{\frac{13}{6}}$, то $A\left(-\frac{a}{2\sqrt{3}}; -\frac{a}{2}; 0\right)$, $D\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}; 0; a\sqrt{\frac{13}{6}}\right)$, $B\left(-\frac{a}{2\sqrt{3}}; \frac{a}{2}; 0\right)$, $C\left(\frac{a}{\sqrt{3}}; 0; 0\right)$.

Найдем координаты направляющих векторов прямых AD и BK : $\vec{AD} \left\{ \frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{a}{2}; a\sqrt{\frac{13}{6}} \right\}$ и $\vec{BK} \left\{ \frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; 0 \right\}$. Косинус угла между прямыми находим по формуле: $\cos \varphi = \frac{\left| \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right|}{a \frac{\sqrt{11}}{2} \cdot a} = \frac{\sqrt{11}}{22}$.

Знакомство с большим количеством вычислительных задач на нахождение угла между прямыми может вызвать у учащихся ошибочное представление о том, что координатный метод удобен только в задачах на вычисление, а к задачам на доказательство он не применим. Учитывая, что задание 14 КИМ ЕГЭ, состоит из двух пунктов (теоретический пункт а и практический пункт б), целесообразно постепенно вводить в курс задачи на доказательство. Вначале можно рассмотреть задачу на доказательство перпендикулярности двух прямых, решение которой фактически ничем не отличается от вычислительных задач (можно считать, что это обычная вычислительная задача, к которой дан ответ $\varphi = 90^\circ$, а еще проще можно воспользоваться фактом, что векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю).

Приведем пример чуть более сложной задачи на доказательство (эта задача предлагалась на Едином государственном экзамене 2016 года).

Задача 3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро AS равно 8, а высота SO пирамиды равна $4\sqrt{3}$. Точка T — основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на прямую AS . Докажите, что точка T является серединой отрезка SA .



Классический метод решения. Поскольку пирамида $SABCD$ правильная, то точка O лежит в плоскости SAC . По теореме Пифагора $AO = \sqrt{AS^2 - SO^2} = 4$, и значит, $AC = 8$. Следовательно, треугольник SAC равнобедренный, а его высота CT одновременно является и медианой.

Координатный метод решения. В качестве начала координат выберем точку O — центр основания, ось аппликат направим вдоль высоты пирамиды, ось абсцисс проходит через вершину B , а ось ординат совпадает с AC . Найдем координаты вершин $S(0; 0; 4\sqrt{3})$, $A(0; -4; 0)$, $C(0; 4; 0)$. Пусть M — середина отрезка AS . Тогда координаты точки $M\{0; -2; 2\sqrt{3}\}$. Найдем координаты направляющих векторов прямых CM и SA : $\vec{SA}\{0; 4; 4\sqrt{3}\}$ и $\vec{CM}\{0; -6; 2\sqrt{3}\}$. Скалярное произведение этих векторов равно нулю, значит, $\vec{CM} \perp \vec{SA}$. Так как из заданной точки можно опустить единственный перпендикуляр на заданную прямую, то точка M совпадает с точкой T , а из этого следует, что точка T является серединой отрезка SA .

Рассмотрение задач 1, 2 и 3 полезно с той точки зрения, что позволяет провести сравнение эффективности трех изучаемых методов. Действительно, если в задаче 1 применение координатного метода можно считать оправданным (хотя и классический метод позволяет без особых затруднений найти ответ), то в задаче 2, без-

условно, классический метод является самым удобным. Внимательно проанализировав ход решения каждой из задач, можно сделать вывод, что координатный метод, как правило, наименее громоздок для многогранников, ребра которых параллельны осям координат, т. е. для прямоугольных параллелепипедов. Чуть менее он удобен, когда часть ребер параллельна осям (прямые призмы или четырехугольная пирамида с прямоугольным основанием), и совсем неудобен в остальных случаях.

Литература

1. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Позняк Э.Г., Юдина И.И. Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2014. – 383 с.

2. Образовательный портал «Решу ЕГЭ» [Электронный ресурс]: – Режим доступа: <https://math-ege.sdangia.ru>, свободный (дата обращения 23.05.2018).

Особенности решения задач на десятичную позиционную запись натуральных чисел

Гриншпон Я. С., Лапатин А. Л.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: lapatin.lesha@yandex.ru

Аннотация

Статья посвящена вопросу изучения десятичных позиционных систем счисления со школьниками 5-8 классов в рамках факультативного курса. Предполагается применение задачного подхода, для чего создается банк авторских задач по аналогии с известными задачи для десятичной записи. Результатом освоения данного курса должно стать расширение историко-математического кругозора учащихся; углубление понимания концепции натурального числа и его поразрядной записи; приобретение навыка решения сложных олимпиадных задач, связанных с позиционной записью числа; формирование предпосылок для изучения действий над многочленами от одной переменной.

Ключевые слова: натуральные числа, позиционные системы счисления, теоретико-числовые задачи.

Любая организованная деятельность человека обязательно сопряжена с понятием о количестве и, как следствие, с существованием какого-то счета. Трудно представить, что человек когда-то совсем не умел считать. Скорее всего, интуитивное понятие о числе заложено в нас с рождения, что подтверждается наблюдениями за маленькими детьми, еще не умеющими говорить. Но это, конечно же, не означает, что во все времена люди записывали данные о количественных наблюдениях в том виде, как мы это делаем сейчас.

В настоящий момент во всем мире общепринята позиционная десятичная система счисления. Мы так к ней привыкли, что все остальные системы воспринимаем как иностранные языки. Однако с теоретической математической точки зрения десятичная система не имеет никаких преимуществ перед позиционными системами с другими основаниями, а в практике использования современных вычислительных устройств более удобными оказываются двоичная и родственные с ней восьмеричная и шестнадцатеричная системы.

Привычка работать только с десятичной записью находит свое отражение и в образовательном процессе. Единственным УМК по математике для школ, содержащим сведения о недесятичных системах счисления, являются учебники серии МПИ ([1]), но они теперь исключены из Федерального перечня.

Приоритет изучения десятичной записи абсолютно оправдан, так как в будущей своей жизнедеятельности выпускники школ и вузов будут использовать навыки выполнения действий над числами, записанными именно в десятичной системе. Однако, когда мы переходим к вопросу обучения способных учащихся, интересующихся математикой, то рассмотрение только одной системы счисления выглядит уже не столь бесспорным.

Действительно, при проведении внеклассной работы, в сборниках занимательных задач, а также на математических конкурсах, викторинах и олимпиадах очень часто встречаются задачи на десятичную запись, но практически отсутствуют аналогичные задачи для недесятичных записей. Актуальность же решения таких задач помимо общеразвивающей и исторической их функции обусловлена тем, что они могут стать основой для выработки удобных алгоритмов действий над многочленами от одной переменной по аналогии с алгоритмами для натуральных чисел ([2]).

В данной статье представлен цикл задач, предназначенных для учеников 5-8 классов и направленных на изучение недесятичной позиционной записи натуральных чисел. Предполагается, что эти задачи войдут в разрабатываемый авторами сборник задач для факультативного курса «Решение задач на запись числа в позиционных системах счисления». Все приведенные в статье задачи являются авторскими.

Методически оказывается целесообразным начать изучение этой темы с задач на сумму цифр числа, так как в этих задач тренируется навык перехода от позиционной записи к сумме разрядных слагаемых по стандартизированной схеме вида $\overline{ab}_p = pa + b$, $\overline{abc}_p = p^2a + pb + c$ и т. д. Далее можно переходить к более сложным задачам на перестановку цифр числа (в частности, на обратное прочтение числа), в которых необходимо применять переход к сумме разрядных слагаемых для нескольких похожих чисел, отличающихся друг от друга только порядком следования цифр в их позиционной записи.

На начальном этапе курса полезно выполнять проверку найденных ответов в привычной десятичной системе. С одной стороны, это

возможность убедиться в корректности проведенных рассуждений, с другой стороны — оттачивается навык перевода записи натурального числа из одной системы в другую (который впоследствии пригодится и на уроках информатики).

При обсуждении этих задач со школьниками нельзя обойти стороной вопрос о том, что все предложенные задачи можно решить методом полного перебора, так как множество натуральных чисел с фиксированным количеством цифр конечно (точнее, существует $p^n - p^{n-1}$ n -значных чисел в системе счисления с основанием p). Необходимо подчеркнуть, что это абсолютно законное математическое рассуждение, но оно, как правило, является не самым рациональным. Эффективнее оказывается решать задачу в общем виде, обозначив неизвестные цифры переменными и составив по условию задачи диофантовое уравнение, которое удобно решать либо исходя из соображений делимости, либо оценивая буквенные выражения исходя из ограниченности множества цифр.

Напомним основные определения, которые мы будем использовать.

Определение 1. *Под записью*

$$A = \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}_{(p)}, \quad (1)$$

где $0 \leq a_1, a_2, \dots, a_n < p$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_1 \neq 0$, $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 1$, понимают число, равное сумме

$$A = a_1 \cdot p^{n-1} + a_2 \cdot p^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n \quad (2)$$

Запись (1) называют записью числа A в позиционной системе счисления с основанием p , а сумму (2) называют суммой разрядных слагаемых числа в системе счисления с основанием p . Символы, обозначающие числа a_1, a_2, \dots, a_n , называют цифрами, а про число A говорят, что оно является n -значным.

В дальнейшем при использовании десятичной записи мы не будем подписывать основание.

Задача 1. Найдите двузначное число, которое в семеричной системе счисления больше суммы своих цифр: а) в два раза; б) в три раза; в) в семь раз; г) в восемь раз.

Решение. Пусть данное число имеет вид \overline{ab}_7 , где $1 \leq a \leq 6$ и $0 \leq b \leq 6$. По условию задачи для каждого из пунктов составим уравнение.

Пункт а). $7a + b = 2(a + b)$, $5a = b$. Откуда $b:5$, а значит, $b = 0$ или $b = 5$. Если $b = 0$, то и $a = 0$, что противоречит условию. При $b = 5$ и $a = 1$, получаем число 15_7 . Проверим в десятичной системе:

$15_7 = 7 + 5 = 12$, $1 + 5 = 6$, 12 в два раза больше 6.

Пункт б). $7a + b = 3(a + b)$, $2a = b$. Откуда $b \div 2$, а значит, $b = 2$, $b = 4$ или $b = 6$. Получаем ответы 12_7 , 24_7 и 36_7 . Проверка в десятичной системе: $12_7 = 7 + 2 = 9$, $24_7 = 14 + 4 = 18$ и $36_7 = 21 + 6 = 27$. Эти значения в три раза больше соответственных сумм цифр: 3, 6 и 9.

Пункт в). $7a + b = 7(a + b)$, $b = 0$. Подходят числа 10_7 , 20_7 , 30_7 , 40_7 , 50_7 и 60_7 . После сделанной проверки в десятичной системе, можно обратить внимание школьников на тот факт, что приписывание справа нуля в семеричной системе равносильно умножению на семь, в общем же случае, приписывание нуля равносильно умножению на основание системы счисления.

Пункт г). $7a + b = 8(a + b)$, $a + 10b = 0$, что невозможно, так как a положительно, а b неотрицательно. Таким образом, чисел, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

Деление данной задачи на пункты хорошо иллюстрирует разнообразие возможных результатов при решении казалось бы совершенно однотипных задач. Рассмотрим еще одну задачу со схожей формулировкой, при аналогичном решении которой приходится применять более тонкий аппарат взаимно простых чисел.

Задача 2. Найдите двузначное число, которое в восьмеричной системе счисления в три раза больше суммы своих цифр

Решение. Аналогично предыдущей задаче: $8a + b = 3(a + b)$, $5a = 2b$. Так как 2 и 5 взаимно просты, то $b \div 5$, а значит, $b = 5$ и $a = 2$, получаем число 25_7 .

Рассмотрим теперь аналогичные задачи для трехзначных чисел.

Задача 3. Найдите трехзначное число, которое в пятеричной системе счисления в десять раз больше суммы его цифр.

Решение. Пусть данное число имеет вид \overline{abc}_5 . Имеем уравнение $25a + 5b + c = 10(a + b + c)$. Упрощаем $15a - 5b = 9c$. Откуда $c \div 5$, и значит, $c = 0$ (это единственная цифра в пятеричной системе, кратная пяти). Подставим в уравнение: $3a = b$. Откуда $b \div 3$, и значит, $b = 0$ или $b = 3$. Если $b = 0$, то $a = 0$, что противоречит трехзначности искомого числа. При $b = 3$ и $a = 1$, получаем число 130_5 .

Следующая задача отличается только основанием, однако решение выглядит несколько сложнее.

Задача 4. Найдите трехзначное число, которое в шестеричной системе счисления в десять раз больше суммы его цифр.

Решение. Пусть данное число \overline{abc}_6 . Имеем уравнение $36a + 6b + c = 10(a + b + c)$. Упрощаем $26a - 4b = 9c$. Откуда $c \div 2$, и значит, $c = 0$, $c = 2$ или $c = 4$.

При $c = 0$ получим $13a = 2b$. Следовательно, $b \div 13$ и $b = 0$, а значит, и $a = 0$, что противоречит трехзначности.

Если $c = 2$, то $13a = 2b + 9$. Следовательно, $(2b + 9) \div 13$. Но, в силу ограниченности множества цифр в шестеричной системе, справедлива оценка $9 \leq 2b + 9 \leq 19$. Так как в этой промежуточной области существует единственное число, кратное 13, то $2b + 9 = 13$. Таким образом, $b = 2$ и $a = 1$, число 122_6 .

Если $c = 4$, то $13a = 2b + 18$. Следовательно, $(2b + 18) \div 13$. Но из оценки $18 \leq 2b + 18 \leq 28$ вытекает, что $2b + 18 = 26$. Итак, $b = 4$ и $a = 2$, число 244_6 .

Проверка в десятичной системе показывает, что оба ответа подходят.

Перейдем к задаче на обратное прочтение числа.

Задача 5. Трехзначное число в шестеричной системе счисления записали в обратном порядке. Полученное число оказалось на двадцать один больше удвоенного данного числа. Найдите данное число.

Решение. Пусть данное число \overline{abc}_6 . Тогда число, записанное в обратном порядке, имеет вид \overline{cba}_6 . Получим $(36a + 6b + c) \cdot 2 = 36c + 6b + a + 21$. Упростим: $71a + 6b - 34c = 21$. Из этого равенства видно, что $71a$ нечетно, следовательно, a нечетно, и значит, $a = 1$, $a = 3$ или $a = 5$.

Оценим a . Так как $34c \leq 170$, то $71a = 34c - 6b + 21 \leq 191$. При $a = 3$ и $a = 5$ имеем $71a > 191$, значит, остается $a = 1$. Подставим: $71 + 6b - 34c = 21$. Упростим: $3b + 25 = 17c$. Оценим c : $25 \leq 3b + 25 \leq 40$, значит, $25 \leq 17c \leq 40$ и $c = 2$. Отсюда $b = 3$, число 132_6 .

Проверим в шестеричной и десятичной системах: $132_6 \cdot 2_6 = 304_6$, $304_6 - 231_6 = 33_6$, $33_6 = 21$.

Задачи на обратное прочтение числа являются частным случаем задач на перестановку цифр. Рассмотрим такую задачу.

Задача 6. Последнюю цифру трехзначного числа по основанию пять перенесли в начало и к полученному трехзначному числу прибавили данное число. В результате получилось трехзначное число, кратное двадцати пяти. Найдите данное число.

Первый способ. Аналитическое решение. Пусть данное число \overline{abc}_5 . Тогда $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, причем $a \neq 0$ и $c \neq 0$, так как числа \overline{abc}_5 и \overline{cba}_5 трехзначные. По условию $(25a + 5b + c + 25c + 5a + b) : 25$. Преобразуем: $((30a + 25c + 5b) + (b + c)) : 25$. Откуда $(b + c) : 5$, и значит, так как $c \neq 0$ и $b + c \leq 8$, то $b + c = 5$.

Если $c = 1$, то $b = 4$ и $30a + 6b + 26c = 30a + 50 =$

$((25a + 50) + 5a) : 25$. Следовательно, $5a : 25$ и $a : 5$. Противоречие.

Если $c = 2$, то $b = 3$ и $30a + 6b + 26c = 30a + 70 = ((25a + 50) + 5a + 20) : 25$. Следовательно, $(5a + 20) : 25$ и $(a + 4) : 5$. Подходит только $a = 1$. Проверим, что результат трехзначен: $30a + 70 = 100 < 125$. Значит, одно из искомых чисел 132_5 .

Если $c = 3$, то $b = 2$ и $30a + 6b + 26c = 30a + 90 = ((25a + 50) + 5a + 40) : 25$. Следовательно, $(5a + 40) : 25$ и $(a + 8) : 5$. Подходит только $a = 2$. Но $30a + 90 = 150 \geq 125$, что противоречит трехзначности результата.

Если $c = 4$, то $b = 1$ и $30a + 6b + 26c = 30a + 110 = ((25a + 100) + 5a + 10) : 25$. Следовательно, $(5a + 10) : 25$ и $(a + 2) : 5$. Подходит только $a = 3$. Но $30a + 110 = 200 \geq 125$, что противоречит трехзначности результата.

Второй способ. Решение-ребус. Заметим, что если число, записанное в позиционной системе по основанию p , кратно p , то оно заканчивается нулем. Если оно кратно p^2 , то оно заканчивается двумя нулями. Если оно кратно p^k , то оно заканчивается k нулями. В нашем случае трехзначное число по основанию 5 кратно 25. На конце будет два нуля.

Запишем условие задания в виде примера на сложение «в столбик» чисел \overline{abc}_5 и \overline{cab}_5 .

$$\begin{array}{r} + \quad abc \\ \quad cab \\ \hline *00 \end{array}$$

Сумма $c + b$ заканчивается нулем, значит, $c + b = 5$, единица переходит в старший разряд. Сумма $b + a + 1$ заканчивается нулем, значит, $b + a = 4$, единица переходит в старший разряд. Так как сумма $a + c + 1$ не дает перехода единицы в старший разряд, то $a + c < 4$. Также $a \neq 0$ и $c \neq 0$. Следовательно, возможны три случая: а) $a = 1$ и $c = 1$; б) $a = 1$ и $c = 2$; в) $a = 2$ и $c = 1$.

Случаи а) и в) невозможны, так как условия $c + b = 5$ и $b + a = 4$ противоречат друг другу. В случае б) получим $b = 3$, число 132_5 .

В заключение, отметим, что знание систем счисления приводит к более глубокому пониманию понятия числа (например, делимость числа на три — это свойство числа, а делимость суммы цифр на три — это свойство десятичной цифровой записи числа; в других системах счисления эти свойства могут оказаться неравносильными).

Материалы, представленные в работе, могут быть использованы как на основных и дополнительных уроках математики, так и на уроках информатики. Это позволяет говорить о межпредметности разрабатываемого курса.

Литература

1. Гельфман Э. Г. Математика : учебник для 5 класса : в 2 ч. Ч. 1 / Э. Г. Гельфман, О. В. Холодная. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 152 с. : ил.

2. Гриншпон Я.С., Лапатин А.Л. Алгоритмы выполнения арифметических действий над натуральными числами и над многочленами от одной переменной в школьном курсе математики // Дневник науки. 2018. №3 [Электронный ресурс]. URL: http://www.dnevniknauki.ru/images/publications/2018/3/pedagogy/Grinshpon_Lapatin.pdf (Дата обращения 05.06.2018).

Исследование вовлеченности школьников и студентов в учебную деятельность на занятиях по математике с применением геймификации

Ли О. И., Лазарева Е. Г.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: o.lee.k@mail.ru, lazareva@math.tsu.ru

Аннотация

Геймификация – особая организация учебной деятельности с использованием игровых элементов, таких как правила игры, игроки, уровни, награды, рейтинги и т.д. Одна из потенциальных возможностей геймификации в образовании – повышение вовлеченности обучающихся в образовательный процесс. Авторы разработали схемы геймификации уроков математики в средней школе и практических занятий по математическому анализу в ВУЗе. Внедрив эти схемы, авторы изучили, как изменились активность учащихся на занятиях. Исследование показало значимое повышение вовлеченности учащихся в учебный процесс, что, однако, не всегда гарантирует повышение уровня знаний.

Ключевые слова: геймификация, преподавание математики, применение критерия знаков, применение критерия Уилкоксона.

Геймификация – одно из актуальных направлений педагогических технологий. Одна из целей геймификации учебного процесса – повысить вовлеченность обучающихся в деятельность на занятиях, стимулировать интерес к достижению успехов в обучении [1].

Изучение математики предполагает получение новых знаний и их использование в дальнейшем обучении, то есть «освоение пространства» и переходы на «новые уровни», поэтому этот процесс можно удачно геймифицировать, не уходя от математического содержания.

Во время педагогической практики в лицее № 1 г. Томска на уроках математики 5-ого класса мы геймифицировали 2 темы: «Порядок действий в вычислениях» (4 урока), «Степень числа» (4 урока). Целью этого эксперимента было повышение активности учащихся

на занятиях по математике. После каждой темы проводилась самостоятельная работа. Для сравнения активности учащихся на классических уроках математики (по теме «Сложение и вычитание») и на уроках с применением геймификации велось наблюдение за устными ответами и решением примеров, задач на доске.

Для каждой из геймифицированных тем были созданы 3 уровня:

1) Для прохождения на первый уровень учащийся должен был правильно выполнить одно задание на доске либо на своем месте в тетради раньше, чем будет получено решение на доске.

2) Чтобы пройти на второй уровень, учащийся должен был сначала правильно решить все задания из учебника, которые записаны на доске в течение урока; затем он получает карточку с более сложными заданиями и если получает оценку «5», то проходит на второй уровень.

3) На последний третий уровень могли пройти только те, кто помог своему однокласснику пройти на первый или второй уровень. Помощь происходила во время решения примеров на доске.

На этих трех уровнях у учеников были разные игровые роли: на первом - специалисты, на втором - магистры и на третьем - профессора. Для каждого ученика были приготовлены именные карточки, на которых отмечались полученные роли. Переход от предыдущего уровня к следующему происходил во время уроков на одну тему. Ученики видели свой прогресс в освоении темы и старались его форсировать. В конце изучения темы определялось, кто кем стал: специалист, либо магистр, либо профессор.

Для того, чтобы определить, повысилась ли активность учащихся на уроках с применением геймификации, мы воспользовались критерием Уилкоксона ([2], с.122). Он применяется для случайной выборки, состоящей из наблюдаемых числовых значений x_1, x_2, \dots, x_n случайной величины X с неизвестной непрерывной функцией распределения $F(x)$.

Для использования критерия Уилкоксона нужно:

1. Вычислить все разности между индивидуальными значениями показателя после проведения эксперимента и до него. Удалить нулевые значения из выборки. Получим значения x_1, x_2, \dots, x_n .

2. Модули $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$ ранжировать в порядке возрастания, выравнивая ранги одинаковых значений модулей.

3. Отметить ранги $|x_i|$, соответствующие сдвигам в нетипичном направлении. Например, если в большинстве случаев после про-

ведения эксперимента наблюдалось увеличение измеряемого параметра, то его уменьшение следует считать нетипичным сдвигом.

Эмпирическое значение критерия Уилкоксона определяется как сумма рангов x_i , соответствующих нетипичным сдвигам. Критическое значение критерия можно найти по таблицам, например, [3].

В качестве нулевой гипотезы примем $H_0 = \{m = 0\}$, то есть отсутствие неслучайного сдвига, медиана m распределения $F(x)$ равна 0. Альтернативная гипотеза $H_1 = \{m > 0\}$, имеется неслучайный положительный сдвиг.

Для применения критерия подсчитаем количество устных ответов и у доски каждого ученика на классических уроках математики и отдельно на геймифицированных уроках. Заметим, что ученики выходили к доске по своему желанию. Следуя алгоритму использования критерия Уилкоксона, проведем расчеты (таблица 1).

Таблица 1. Применение критерия Уилкоксона для сравнения активности учеников 5-го класса на классических и геймифицированных уроках математики

Ученики	Уроки класс. Кол-во ответов	Уроки гейм. Кол-во ответов	Разн.	Модули разност.	Модули упоряд.	Ранги
1	1	1	0	0	0	
2	1	1	0	0	0	
3	0	2	2	2	0	
4	1	0	-1	1	0	
5	1	2	1	1	0	
6	1	3	2	2	1	4
7	1	0	-1	1	1	4
8	4	2	-2	2	1	4
9	0	0	0	0	1	4
10	1	5	4	4	1	4
11	0	2	2	2	1	4
12	0	1	1	1	1	4
13	1	2	1	1	2	11
14	0	1	1	1	2	11
15	0	0	0	0	2	11
16	1	1	0	0	2	11
17	3	1	-2	2	2	11
18	1	3	2	2	2	11
19	2	1	-1	1	2	11
20	0	2	2	2	4	15

Получены следующие результаты. Нетипичны отрицательные сдвиги, число ненулевых сдвигов $n = 15$.

$$T_{\text{эмп}} = 34, T_{\text{крит}}(\alpha = 0, 05) = 30, T_{\text{крит}}(\alpha = 0, 1) = 36.$$

Так как $T_{\text{ЭМП}} = 34 < 36$, гипотезу о случайности типичных сдвигов можно отвергнуть с уровнем значимости $\alpha = 0,1$. Таким образом, имеется положительный сдвиг активности обучающихся на уроках с применением геймификации.

С помощью критерия знаков ([2], с.120) мы исследовали, наблюдается ли значимое повышение успеваемости учащихся 5-го класса по темам «Порядок действий в вычислениях», «Степень числа», усвоенным на уроках с применением геймификации, по сравнению с темой «Сложение и вычитание», изученной на обычных уроках. Критерий знаков применяется, когда сдвиг невозможно измерить численно, например, он выражается качественной оценкой: «стало лучше» или «стало хуже», что соответствует сравнению оценок за самостоятельные работы школьников по двум темам.

Для проверки нулевой гипотезы $H_0 = \{m = 0\}$ определяют типичный сдвиг («+» или «-») и считают количество типичных и нетипичных сдвигов. Эмпирическое значение критерия определяется как число нетипичных сдвигов. Критическое значение критерия $G_{\text{кр}}(\alpha; n)$ определяется по таблице для биномиального распределения с вероятностью успеха $p = 1/2$, где n – общее число ненулевых сдвигов, то есть объем выборки. Можно уточнить уровень значимости, используя точное определение:

$$\alpha = p(k \leq 5) = \sum_{k=0}^{G_{\text{ЭМП}}} C_n^k(0,5)^n.$$

Сравнивая оценки по самостоятельным работам двух тем «Сложение и вычитание» (с.р.1) и «Порядок действий в вычислениях» (с.р.2) (см. таблицу 2), мы увидели, что положительных сдвигов 10, а отрицательных 5. Количество положительных сдвигов превосходит количество сдвигов в отрицательном направлении, то есть $G_{\text{ЭМП}} = 5$. Типичным является положительный сдвиг, можно проверить H_0 против альтернативы $H_1 = \{m > 0\}$. Пусть уровень значимости $\alpha = 0,05$. Тогда $G_{\text{кр}}(\alpha = 0,05; n = 15) = 4$, $G_{\text{ЭМП}} \geq G_{\text{кр}}$. Типичный сдвиг является случайным, нужно принять гипотезу H_0 на уровне значимости 0,05.

Уточним, с каким уровнем α гипотезу H_0 можно отвергнуть. Для этого найдем $\alpha = p(k \leq 5) = \sum_{k=0}^5 C_{15}^k(0,5)^{15} \approx 0,15$. Эта вероятность слишком велика, чтобы отвергать H_0 .

Изменение оценок от темы «Сложение и вычитание» к теме «Степень числа»(с.р.3, табл. 2) также произошло в лучшую сто-

рону. Здесь положительных сдвигов 7, отрицательных 0, то есть $G_{ЭМП} = 0, n = 7$. Нулевая гипотеза отвергается, имеется неслучайный положительный сдвиг, достигаемый уровень значимости при этом равен $\alpha = p(k = 0) = (0, 5)^7 \approx 0, 0078$.

Теперь сравним оценки за самостоятельные работы по темам «Порядок действий в вычислениях» и «Степень числа» (две темы, освоенные с применением геймификации). Получилось 7 положительных сдвигов и 5 отрицательных ($G_{ЭМП} = 5, n = 12$). При этом $G_{кр}(\alpha = 0, 1; 12) = 3$. Значит, $G_{ЭМП} > G_{кр}$, сдвиги являются случайными.

Таблица 2. Успеваемость учащихся 5-го класса по результатам самостоятельных работ

Ученики	С.р.1 «Сложение и вычитание»	С.р.2 «Порядок действий в вычислениях»	С.р.3 «Степень числа»
1	3	4	4
2	3	4	3
3	5	4	5
4	5	5	5
5	3	5	3
6	4	5	5
7	5	4	5
8	4	5	4
9	5	5	5
10	3	5	5
11	4	4	5
12	4	3	5
13	5	4	5
14	3	4	5
15	5	5	5
16	3	5	5
17	4	4	4
18	3	5	3
19	4	5	4
20	5	4	5

В целом, можно сказать, что внедрение геймификации в процесс обучения математике в 5-м классе оказалось достаточно удачным способом для повышения активности учащихся, но не очень значительно повлияло на уровень их успехов.

Мы попробовали применить аналогичную технологию в обучении студентов 1 курса по дисциплине «Математический анализ». Основная наша цель при внедрении геймификации – повышение уровня посещаемости и активности студентов на практических за-

нениях. Было проведено 7 практических занятий по теме «Неопределенный интеграл» с использованием элементов геймификации в одной группе первого курса физического факультета (20 человек). Было создано игровое пространство: введены знаки отличия игроков («Знаток» и «Эксперт»), сформулированы правила, по которым присуждаются эти знаки, составлена таблица достижений с открытым доступом для всех студентов группы. Аналогичные эксперименты в ВУЗовском образовании в настоящее время проводятся достаточно часто, см., например, [4].

После проведения занятий с элементами геймификации мы сравнили посещаемость студентов во время этих занятий и их активность на занятиях с посещаемостью и активностью на классических практических занятиях, которые были проведены ранее. Для сравнения были выбраны 7 занятий по теме «Пределы последовательностей и функций». Исходные данные приведены в таблице 3. Получили следующие результаты: среднее число занятий, которые посетил студент, снизилось с 6,4 до 6,1. Среднее число выходов к доске за 7 занятий (активность на занятиях) возросло с 1,4 до 2,1.

Таблица 3. Данные о посещаемости и активности на занятиях без геймификации и с геймификацией для группы студентов 1 курса физического факультета ТГУ

Студенты	Посещено занятий без гейм.	Посещено занятий с гейм.	Выходы к доске без гейм.	Выходы к доске с гейм.
1	7	7	1	4
2	7	7	0	5
3	6	7	1	3
4	7	5	0	1
5	6	6	1	1
6	6	6	4	0
7	7	5	0	0
8	7	6	1	0
9	7	7	3	5
10	7	7	7	7
11	7	7	5	6
12	7	5	0	0
13	7	7	1	1
14	7	7	3	5
15	7	7	0	2
16	7	7	0	0
17	7	5	0	0
18	4	7	1	2
19	4	5	0	0
20	4	2	0	0

Мы воспользовались критерием Уилкоксона, чтобы выяснить, случайны ли изменения, произошедшие в активности и посещаемости занятий.

Получены следующие результаты. Для посещаемости (нетипичны положительные сдвиги, число ненулевых сдвигов $n = 9$):

$$T_{\text{эмп}} = 12, T_{\text{крит}}(\alpha = 0, 1) = 10, T_{\text{эмп}} > T_{\text{крит}},$$

гипотеза H_0 о случайности сдвигов принимается.

Для активности на занятиях (нетипичны отрицательные сдвиги, число ненулевых сдвигов $n = 11$):

$$T_{\text{эмп}} = 11, T_{\text{крит}}(\alpha = 0, 05) = 13, T_{\text{эмп}} < T_{\text{крит}},$$

имеется неслучайный положительный сдвиг.

Внедрение геймификации в обучение студентов показало, что не все обучающиеся заинтересованы в такой форме учебы, о чем говорит некоторое снижение посещаемости (статистически не значимое). С другой стороны, статистически значимое повышение активности на занятиях свидетельствует о том, что имеет смысл применять эту технологию в обучении. Возможно, необходимы более продуманные и разнообразные игровые правила, активизирующие не только внешнюю, но и внутреннюю мотивацию для изучения математики.

Литература

1. Орлова О.В., Титова В.Н. Геймификация как способ организации обучения // Вестник ТГПУ (TSPU Bulletin). – 2015. 9(162) – С. 60–64.
2. Ллойд Э., Ледерман У. Справочник по прикладной статистике. Т.2. М: Финансы и статистика, 1990, 526 с.
3. Ликеш И., Ляга Й. Основные таблицы математической статистики. – М.: Финансы и статистика, 1985, 356 с.
4. Томилова О.В. Опыт применения концепции геймификации для повышения эффективности учебных занятий // Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации. Т. 1, 2015г. – С. 376–389.

Алгоритмы решения опорных вычислительных задач по нахождению параметров треугольника с известными сторонами

Родикова Я. С., Гриншпон Я. С.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: Yana04@vtomske.ru

Аннотация

Информационные технологии широко используются в различных сферах современного общества, в том числе и в образовании. В данной работе исследуется вопрос о применении вычислительных возможностей компьютера к решению опорных геометрических задач, связанных с курсом планиметрии средней школы, а именно, задачи нахождения параметров треугольника, если известны длины его сторон. Обучающая функция программы заключается в знакомстве школьников с доказательствами используемых формул, а также в тренировке учащихся решению конкретных задач, использующих общие алгоритмы опорных задач.

Ключевые слова: планиметрия, опорные задачи, треугольник.

В школьном курсе геометрии многими учителями и методистами принято выделять класс так называемых опорных задач. К ним, в частности, относят ряд важных вычислительных задач, основанных на умении применять основные геометрические формулы и теоремы для вычисления длин, углов, площадей и объемов некоторых стандартных геометрических фигур. Перечислим некоторые особенности опорных вычислительных задач, подчеркивающие большую ценность их изучения при освоении геометрии:

- алгоритмы решения опорных задач применимы для всего класса подобных задач, отличающихся друг от друга только набором исходных числовых данных;
- анализ результатов решения опорных задач позволяет сделать вывод о некоторых полезных закономерностях между геометрическими величинами (как возрастание или убывание кой-либо величины влияет на значение других связанных по смыслу величин);
- освоение навыка решения опорных задач помогают ученику запомнить основные геометрические формулы и теоремы, а также

научиться выделять ситуации, в которых удобно применять данные формулы и теоремы;

– опорные задачи часто могут использоваться при рассмотрении более сложных задач как составная часть их решения.

Методы решения опорных вычислительных задач легко алгоритмируются и программируются. Таким образом, возникла идея создания программы, сочетающей в себе вычислительный инструмент, позволяющий находить необходимые числовые геометрические характеристики, и обучающий компонент, направленный на понимание и запоминание учащимися способов решения опорных задач. Обучающий компонент должен в себя включать строгое математическое обоснование всех изучаемых алгоритмов и тренировочные задачи для закрепления данных алгоритмов. Кроме того, данную программу можно будет использовать и как справочник, в котором собраны все основные планиметрические формулы.

Учитывая, что треугольник является основной изучаемой фигурой в школьном курсе планиметрии и исследование свойств других многоугольников (в частности, выпуклых четырехугольников и правильных n -угольников), во многом, можно свести к изучению свойств треугольников, на которые эти многоугольники разбиваются, в качестве начальной задачи была выбрана задача нахождения параметров треугольника по трем известным его сторонам.

Задача. Дано: длины трех сторон треугольника.

Выяснить: существует ли треугольник с данными сторонами?

Найти:

- 1) периметр треугольника;
- 2) площадь треугольника;
- 3) величины углов треугольника;
- 4) длины медиан треугольника;
- 5) длины высот треугольника;
- 6) длины биссектрис треугольника;
- 7) радиус окружности, вписанной в треугольник;
- 8) радиус окружности, описанной около треугольника;
- 9) расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника.

Алгоритм решения задачи. Пусть заданы числа a , b , c , являющиеся длинами сторон треугольника.

Выясним, существует ли такой треугольник, используя неравенство треугольника, которое утверждает, что в любом треугольнике сумма длин двух сторон больше длины третьей стороны: $a + b > c$,

$b + c > a$, $a + c > b$. Верно и обратное утверждение: для любых трех положительных чисел a , b и c , удовлетворяющих неравенствам $a + b > c$, $b + c > a$, $a + c > b$, существует треугольник со сторонами a , b и c . Отметим, что если одно из трех неравенств превращается в равенство, то треугольник вырождается в отрезок (т. е. вершины этого «треугольника» лежат на одной прямой).

Вычислим элементы треугольника с помощью следующих формул:

1) по определению периметр треугольника равен сумме длин его сторон, т. е. $P = a + b + c$;

2) для нахождения площади треугольника используем формулу Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{P}{2}$ — полупериметр;

3) величины углов треугольника выразим из теоремы косинусов, $\alpha = \arccos \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, где α — это угол, лежащий против стороны a ;

4) длины медиан вычислим по формуле $m_a = \frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$, где m_a — это медиана, проведенная к стороне a ;

5) длины высот удобно выразить через площадь треугольника, найденную ранее по формуле Герона, $h_a = \frac{2S}{a}$, где h_a — это высота, проведенная к стороне a ;

6) длины биссектрис вычислим по формуле $l_a = \frac{\sqrt{2bc p(p-a)}}{b+c}$, где l_a — это биссектриса, проведенная к стороне a ;

7) радиус окружности, вписанной в треугольник, выражается через площадь и полупериметр по формуле $r = \frac{S}{p}$;

8) радиус окружности, описанной около треугольника, находится по формуле $R = \frac{abc}{4S}$;

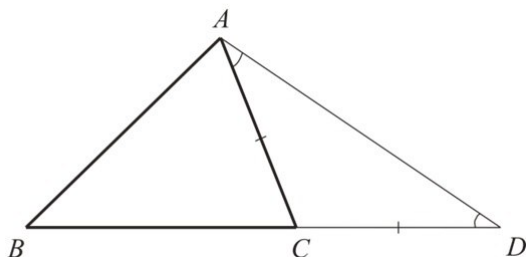
9) расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника находится по формуле Эйлера $d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$.

Отметим, что утверждение, обратное неравенству треугольника, а также формулы 4), 6) и 9) не изучаются в базовом курсе школьной геометрии. Поэтому весьма актуальным является вопрос о доказательстве этих фактов. Тем более, что многие школьники находят эти формулы в Интернете и успешно используют их при решении задач, не догадываясь при этом, что их можно не зазубривать, а достаточно несложно вывести из известных им теорем. Важным является и то обстоятельство, что для значительной части нынешних учеников изучение нового материала с помощью компьютерной программы более эффективно, чем традиционное изучение с помощью бумажного учебника, так как применение современных технологий вызывает у них большую заинтересованность.

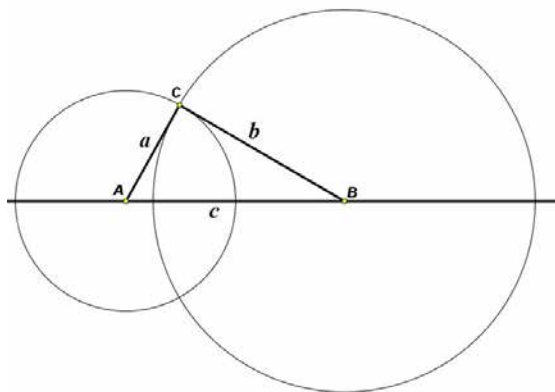
Приведём математическое обоснование первого пункта задачи.

Теорема 1. Пусть a, b, c — положительные числа. Треугольник со сторонами a, b, c существует, тогда и только тогда, когда выполняются неравенства $a + b > c, b + c > a$ и $a + c > b$.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и покажем, что $AB > AC + BC$. На продолжении стороны BC отложим отрезок CD , равный AC . В равнобедренном треугольнике ACD углы CAD и ADC равны. Следовательно, в треугольнике ABD угол ADB меньше угла BAD , и значит, $BD > AB$, или $BC + CD > AB$. Но так как $CD = AC$, то $AC + BC > AB$. Аналогично, доказываются неравенства и для двух других сторон треугольника.



Пусть теперь даны три числа, удовлетворяющие неравенствам. Расположим их в порядке возрастания: $a \leq b \leq c$. На произвольной прямой отложим отрезок $AB = c$. Проведем две окружности: первая — с центром в точке A радиуса a , вторая — с центром в точке B радиуса b . Эти две окружности пересекутся, так как по условию расстояние между их центрами меньше суммы радиусов ($c < a + b$) и больше их разности ($c \geq b > b - a$). Если C — одна из точек пересечения окружностей, то треугольник ABC искомым.



Приведём возможный список тренировочных задач, направленных на закрепление знаний по первому пункту задачи (неравенство треугольника).

Задача 1. У равнобедренного треугольника стороны равны 3 и 7. Какая из сторон является основанием?

Задача 2. Какое наименьшее значение может принимать периметр неравностороннего треугольника с целыми длинами сторон?

Задача 3. В треугольнике две стороны равны 3.14 и 0.67. Найдите третью сторону, если известно, что её длина является целым числом.

Задача 4. Натуральные числа от 1 до 200 разбили на 50 множеств. Докажите, что в одном из них найдутся три числа, являющиеся длинами некоторого треугольника.

Для программной реализации задач на компьютере была выбрана открытая среда разработки программного обеспечения Lazarus, использующая язык программирования Object Pascal.

Приведём часть кода программы, соответствующую алгоритму проверки существования треугольника.

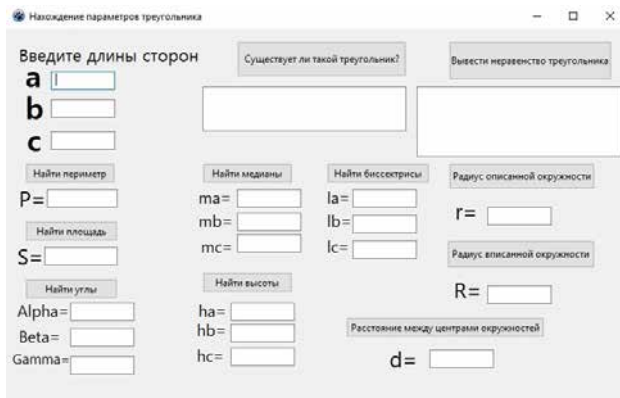
```

procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
begin
  a:=StrToInt(Edit1.Text);
  b:=StrToInt(Edit2.Text);
  c:=StrToInt(Edit3.Text);
  if ((a>0) and (b>0) and (c>0)) then
  begin
    if ((a+b)>c) and ((b+c)>a) and ((a+c)>b) then
  
```

```

Memo1.Text:='Да, треугольник существует!'
else
  if ((a+b)=c) and ((b+c)>a) and ((a+c)>b) or ((a+b)>c) and
((b+c)=a) and ((a+c)>b) or ((a+b)>c) and ((b+c)>a) and ((a+c)=b))
  then
    Memo1.Text:='Треугольник вырождается в отрезок!'
  else
    Memo1.Text:='Нет, треугольник не существует, так как не вы-
полняется неравенство треугольника!'
  end
else Memo1.Text:='Задача не имеет смысла, так как стороны
треугольника должны быть положительными!'
end;
Создана форма следующего вида.

```



Сначала заполняются значения длин сторон треугольника в строки a , b , c , соответственно. Затем при нажатии кнопок в окна выводятся результаты.

Пример реализации программы:

Нахождение параметров треугольника

Введите длины сторон

a = 2

b = 4

c = 5

Найти периметр

P = 11

Найти площадь

S = 3,799671038392

Найти углы

Alpha = 0,3897607327

Beta = 0,8632118900

Gamma = 1,8886200307

Существует ли такой треугольник?

Да, треугольник существует!

Найти медианы

ma = 4,4158804331

mb = 3,2403703490

mc = 1,9364916731

Найти высоты

ha = 3,7996710383

hb = 1,8998355191

hc = 1,5198684153

Ввести неравенство треугольника

Неравенство треугольника. Пусть a, b, c – положительные числа. Треугольник со сторонами a, b, c существует тогда и только тогда, когда выполняются неравенства $a + b > c, b + c > a, a + c > b$.

Найти биссектрисы

la = 4,3603148600

lb = 2,5951288749

lc = 1,5634719199

Радиус описанной окружности

r = 0,6908492797

Радиус вписанной окружности

R = 2,6318067798

Расстояние между центрами окружностей

d = 1,8138476479

Литература

1. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Позняк Э.Г., Юдина И.И. Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2014. – 383 с.
2. Осипенко Л.А., Стацевичуте Е.Э. Опорные задачи в планиметрии: методическое пособие. – Иркутск, 2010. – 48 с.
3. Образовательный портал ФИЗ/МАТ класс [Электронный ресурс]: – Режим доступа: <http://www.fmclass.ru/index.php>, свободный. – Загл. с экрана (дата обращения 21.11.2017).

Научное издание

Всероссийская молодежная научная
конференция
«Все грани математики и механики»
Томск, 24–28 апреля 2018 г.

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А. В. Старченко